المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

برنامج التدريب العسكري المهني

تخصص اتصالات

رياضيات تخصصية

182 ريض

طبعة ١٤٢٩ هـ

مقدمة

الحمد للّه وحده، والصلاة والسلام على من لا نبي بعده، محمد وعلى آله وصحبه، وبعد:

تسعى المؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني لتأهيل الكوادر الوطنية المدربة القادرة على شغل الوظائف التقنية والفنية والمهنية المتوفرة في سوق العمل، ويأتي هذا الاهتمام نتيجة للتوجهات السديدة من لدن قادة هذا الوطن التي تصب في مجملها نحو إيجاد وطن متكامل يعتمد ذاتياً على موارده وعلى قوة شبابه المسلح بالعلم والإيمان من أجل الاستمرار قدماً في دفع عجلة التقدم التنموي: لتصل بعون اللّه تعالى لمصاف الدول المتقدمة صناعياً.

وقد خطت الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج خطوة إيجابية تتفق مع التجارب الدولية المتقدمة في بناء البرامج التدريبية، وفق أساليب علمية حديثة تحاكي متطلبات سوق العمل بكافة تخصصاته لتلبي متطلباته ، وقد تمثلت هذه الخطوة في مشروع إعداد المعايير المهنية الوطنية الذي يمثل الركيزة الأساسية في بناء البرامج التدريبية، إذ تعتمد المعايير في بنائها على تشكيل لجان تخصصية تمثل سوق العمل والمؤسسة العامة للتدريب التقني والمهني بحيث تتوافق الرؤية العلمية مع الواقع العملي الذي تفرضه متطلبات سوق العمل، لتخرج هذه اللجان في النهاية بنظرة متكاملة لبرنامج تدريبي أكثر التصاقاً بسوق العمل، وأكثر واقعية في تحقيق متطلباته الأساسية.

وتتناول هذه الحقيبة التدريبية " **رياضيات تخصصية** " لمتدربي تخصص " **اتصالات** " لمعاهد التدريب العسكري المهني موضوعات حيوية تتناول كيفية اكتساب المهارات اللازمة لهذا التخصص.

والإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج وهي تضع بين يديك هذه الحقيبة التدريبية تأمل من اللّه عز وجل أن تسهم بشكل مباشر في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة، بأسلوب مبسط يخلو من التعقيد، وبالاستعانة بالتطبيقات والأشكال التي تدعم عملية اكتساب هذه المهارات.

واللّه نسأل أن يوفق القائمين على إعدادها والمستفيدين منها لما يحبه ويرضاه، إنه سميع مجيب الدعاء.

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

تمهيد

الحمد لله مولى النعم، الحمد له على ما خصنا من نعمه وعمّ، والصلاة والسلام على خير العرب والعجم. أما بعد فإن مقرر رياضيات تخصصية 1 يهدف إلى تقديم وثيقة أساسية موجهة لمتدرب الإلكترونيات والكهرباء لتعليمه المهارات الأساسية لعدد من المواضيع الرياضية التي تؤهله لفهم المقررات التخصصية. ولقد ظهر إلينا خدمة للأهداف التربوية إعطاء بعض التفاصيل للنتائج الأساسية والتي يحتاج إليها المتدرب في التطبيقات المباشرة دون التعمق في المسائل النظرية حرصا منا على إيصال المعلومة الواضحة للمتدرب مع الحرص على الإكثار من حل الأمثلة المباشرة التي يمكن أن يتعرض لها المتدرب في مواد التخصص ليتسنى له فهمها بوضوح.

ودراسة هذا المقرر ستمكن المتدرب من:

- فهم كثيرات الحدود وكيفية حل بعض المعادلات الجبرية.
- فهم المحددات والمصفوفات واستخدامها في حل المعادلات الخطية.
- فهم كيفية حل المعادلات الخطية.
- فهم الدوال وكيفية تمثيلها بمنحنيات.
- فهم الدوال الأسية واللوغاريتمية وكيفية حل بعض المعادلات الأسية واللوغاريتمية.
- فهم الأعداد المركبة وكيفية استخدامها لحل بعض المعادلات الجبرية.

ولتحقيق هذه الأهداف بإذن الله تعالى فقد قسمت هذه الحقيبة التدريبية إلى ست وحدات رئيسة:

تعنى الوحدة الأولى لتعريف المتدرب بكثيرات الحدود والعمليات عليها وكيفية تحليلها وبالكسور الجبرية وكيفية اختصارها..

و خصصت الوحدة الثانية لدراسة المحددات وكيفية حسابها والمصفوفات والعمليات عليها وأخيرا كيفية حساب مقلوب مصفوفة مربعة.

أما الوحدة الثالثة فتهدف لمعرفة المتدرب حل بعض المعادلات الجبرية والمعادلات الخطية وكيفية حلها سواء ذات مجهول واحد أو ذات مجهولين أو ذات ثلاثة مجاهيل وأخيرا كيفية استخدام المصفوفات لحلها.

أما الوحدة الرابعة فقد خصصت لدراسة الدوال وأنواعها والدوال العددية المشهورة كبعض الدوال الجبرية والدوال المثلثية الأساسية والدوال الأسية واللوغاريتمية وكيفية تمثيل منحنياتها.

و خصصت الوحدة الخامسة لدراسة الأسس المختلفة والدوال الأسية واللوغاريتمية وكيفية حل بعض المعادلات الأسية واللوغاريتمية.

تجدر الإشارة إلى أن دراسة الدوال الأسية واللوغاريتمية في الوحدة الرابعة بغرض رسم منحنياتها بينما في الوحدة الخامسة بغرض حل المعادلات .

أما الوحدة السادسة والأخيرة فقد تناولت الأعداد المركبة والعمليات عليها وكيفية كتابتها بأشكالها المختلفة الديكارتي والقطبي والأسي وأخيرا كيفية استخدامها في حل بعض المعادلات الجبرية.

والله الموفق

رياضيات تخصصية

كثيرات الحدود

كثيرات الحدود

1

اسم الوحدة: كثيرات الحدود

الجدارة: معرفة كثيرات الحدود والكسور الجبرية

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على:

- اجراء العمليات الحسابية عاى كثيرات الحدود.
- تحليل كثيرات الحدود.
- حساب الكسور الجبرية واختصارها.

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة 80٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: ستة ساعات.

الوحدة الأولى : كثيرات الحدود

1. تعريف كثيرات الحدود

تعريف 1 : يكون الحد الجبري إما ثابتا أو متغيرا أو حاصل ضرب ثابتاً في متغير واحد أو أكثر بشرط أن يكون أس المتغير عددا صحيحا غير سالب. يسمى الثابت معامل الحد الجبري وتكون درجة الحد الجبري هي حاصل جمع أسس المتغيرات فيه.

مثال 1 : معامل الحد الجبري $-3x^2y$ هو -3 ودرجته تساوي 3.

تعريف 2 : كثيرات الحدود هي عبارة عن جمع عدد منته من الحدود ودرجتها هي أكبر درجة حد فيها. الحدود التي تحتوي على نفس المتغير (بما فيه الأس) تسمى الحدود المتشابهة، فمثلا $12x^2$ و $-9x^2$ حدان متشابهان ولكن الحدود $-2x^3y$ و $7x^3y^2$ ليست متشابهة. تتم عملية الاختصار بجمع الحدود المتشابهة فمثلا يختصر $4x^2+3x-2x$ إلى $4x^2+x$. درجة الحد الثابت دائما تساوي الصفر ($2=2x^0$).

الشكل العام لكثيرات الحدود للمتغير x هو كالتالي:
$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.........+a_2x^2+a_1x+a_0$ حيث $a_n \neq 0$ و n عدد صحيح غير سالب. المعامل a_n هو المعامل الرئيسي و a_0 هو الحد الثابت.

مثال 2: الجدول التالي يبين المعامل الرئيسي، الدرجة، الحدود والمعاملات لثلاثة كثيرات حدود:

المعامل الرئيسي	المعاملات	الدرجة	الحدود	كثيرة الحدود
9	$9, -1, 5$	2	$9x^2, -x, 5$	$9x^2-x+5$
-2	$-2, 11$	1	$-2x, 11$	$11-2x$
1	$1, 5, -3$	3	$x^3, 5x, -3$	x^3+5x-3

2. العمليات الحسابية على كثيرات الحدود

1.2 جمع وطرح كثيرات الحدود

مثال 3: اختصر ما يلي:

$$1)\ (3x^2+6x-4)+(4x^2-5x+3),\quad 2)\ (x^2-5x+7)-(2x^2+3x-2).$$

الحل:

$$1)\,(3x^2+6x-4)+(4x^2-5x+3)=(3x^2+4x^2)+(6x-5x)+((-4)+3)=7x^2+x-1$$

$$2)\,(x^2-5x+7)-(2x^2+3x-2)=(x^2-2x^2)+[(-5x)-(+3x)]+(7-(-2))=-x^2-8x+9$$

2.2 ضرب كثيرات الحدود.

لضرب كثيرات الحدود نذكر ببعض تعاريف الأسس وخصائصها والتي سوف نتطرق إليها بأكثر تفصيلا في الوحدة الخامسة

تعريف 3**:** ليكن لدينا عدد حقيقي x وعدد طبيعي n فيكون x أس n هو:

$$x^n = x\times x\times\cdots\times x \quad n \text{ مرة}$$

$$x^0=1 \quad \text{بينما:}$$

تعريف 4**:** ليكن لدينا عدد حقيقي $x\neq 0$ وعدد طبيعي n فيكون x أس $-n$ هو:

$$x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

نظرية 1**:** إذا كان كل من x و y عددا حقيقيا لا يساوي الصفر وكان كل من n و m عددا صحيحا فإن:

$$1)\ \left(x^n\right)^m = x^{nm}$$

$$2)\ (xy)^n = x^n y^n$$

$$3)\ x^n x^m = x^{n+m}$$

$$4)\ \frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$$

تعريف 5**:** تتم عملية الضرب بتوزيع جميع الحدود في القوس الأول على جميع الحدود في القوس الثاني وهكذا.

مثال 4: احسب واختصر ما يلي: $(2x-3)(3x^2-x+1)$

الحل:

$$(2x-3)(3x^2-x+1)=(2x)(3x^2)+(2x)(-x)+(2x)(1)+(-3)(3x^2)+(-3)(-x)+(-3)(1)$$

$$=6x^3-2x^2+2x-9x^2+3x-3=6x^3-11x^2+5x-3$$

بعض القوانين المشهورة لحاصل الضرب:

$$1)\,(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$
$$2)\,(x+y)(x+y)=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$
$$3)\,(x-y)(x-y)=(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$
$$4)\,(x+y)(x+y)(x+y)=(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$5)\,(x-y)(x-y)(x-y)=(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

مثال 5**:** أوجد حاصل الضرب التالي باستخدام القوانين المشهورة:

$$1)\,(7x+10)(7x-10),\qquad 2)\,(2y^2+11z^2)^2,\qquad 3)\,(2x-3y)^3.$$

الحل:

$$1)\;(7x+10)(7x-10)=(7x)^2-(10)^2=49x^2-100$$
$$2)\;(2y^2+11z^2)^2=(2y^2)^2+2(2y^2)(11z^2)+(11z^2)^2=4y^4+44y^2z^2+121z^4$$
$$3)\;(2x-3y)^3=(2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$$

حساب قيمة كثيرة الحدود عند قيمة معينة للمتغير

مثال 6: احسب قيمة $2x^3-6x^2+7$ عندما: $1)\,x=-4,\qquad 2)\,x=\sqrt{2}.$

الحل:

يتم حساب هذه القيمة بتعويض x بالقيم المعطاة كالتالي:

$$1)\,2x^3-6x^2+7=2(-4)^3-6(-4)^2+7=2(-64)-6(16)+7=-128-96+7=-217$$
$$2)\,2x^3-6x^2+7=2(\sqrt{2})^3-6(\sqrt{2})^2+7=2(2\sqrt{2})-6(2)+7=4\sqrt{2}-12+7=4\sqrt{2}-5$$

3.2 قسمة كثيرات الحدود (القسمة المطولة)

تعريف 6**:** قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود تشبه عملية القسمة المستعملة في تقسيم الأعداد الصحيحة.

مثال 7: لتقسيم $x^2+9x-16$ على $x-3$ نتبع الطريقة التالية:

	$x+12$
$x-3$	$x^2+9x-16$
-	x^2-3x
	$12x-16$
-	$12x-36$
	20

إذا في هذا المثال يكون حاصل قسمة $x^2+9x-16$ على $x-3$ هو $x+12$ وباقي القسمة هو 20

وبالتالي يكون لدينا: $x^2+9x-16\div(x-3)=x+12+\dfrac{20}{x-3}$

تمارين

تمرين 1: اذكر الحدود والمعاملات والدرجة والمعامل الرئيسي لكل من كثيرات الحدود التالية:

1) $x^2+2x-7,$ 2) $\sqrt{2},$ 3) $4x^2y^2-5x^3y^2+17xy^3,$

4) $2x^4+3x^3+4x^2+5,$ 5) $x^3-1,$ 6) $-9x^5y+10xy^4-11x^2y^2.$

تمرين 2: احسب واختصر ما يلي:

1) $(3x^2+4x+5)+(2x^2+7x-2),$ 5) $(5x-7)(3x^2-8x-5),$

2) $(4w^2-2w+7)+(5w^3+8w^2-1),$ 6) $(3x^2-2x+5)(2x^2-5x+2),$

3) $(7s^2-4s+11)-(-2s^2+11s-9),$ 7) $(3c-2)(4c+1)(5c-2),$

4) $(u^3-3u^2-4u+8)-(u^2-2u+4),$ 8) $(4u-5)(2u-1)(3u-4).$

تمرين 3: استخدم القوانين المشهورة لحساب واختصار ما يلي:

1) $(3x+5)(3x-5),$ 7) $[(x+5)+y][(x+5)-y],$

2) $(4x^2-3y)(4x^2+3y),$ 8) $[(x-2y)+7][(x-2y)-7],$

3) $(3x^2-y)^2,$ 9) $(x-1)^3,$

4) $(4w+z)^2,$ 10) $(2x+y)^3,$

5) $[(x-2)+y]^2,$ 11) $[(x-1)+2y]^3,$

6) $[(x+3)-y]^2,$ 12) $[4-(1-2y)]^3.$

تمرين 4: أوجد قيم كثيرات الحدود التالية عند النقاط المعطاة:

1) $x^2 + 7x - 1\ ;\ x = 3$

2) $-x^2 - 5x + 4\ ;\ x = -5$

3) $5x^3 - x^2 + 5x - 3\ ;\ x = -1$

4) $1 - x^3 - x^5\ ;\ x = 2$

تمرين 5: استعمل طريقة القسمة المطولة لقسمة كثيرة الحدود الأولى على الثانية:

1) $2x^2 + x - 15,\ x + 3$

2) $20x^3 + 2x^2 + 3x + 20,\ x + 3$

3) $6x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x - 9,\ 2x - 3$

4) $2x^4 - x^3 - 23x^2 + 9x + 45,\ 2x^2 - x - 5$

5) $24x^5 + 21x^3 - 18x^2 - 15,\ 6x^2 + 5$

3. تحليل كثيرات الحدود

تعريف 7: عملية كتابة كثيرة حدود على شكل حاصل ضرب كثيرات حدود من درجة أقل تسمى تحليلا وعملية التحليل تساعدنا في اختصار العبارات الكسرية وفي حل المعادلات وسنتطرق في هذا الباب إلى كثيرات حدود ذات المعاملات الصحيحة فقط.

1.3 طريقة المعامل المشترك الأكبر (أ.ع.م)

في هذه الطريقة نحاول إيجاد أكبر عامل مشترك بين الحدود إذا كان هذا ممكنا كما هو موضح في المثال التالي.

مثال 8: حلل كثيرات الحدود التالية باستخدام العامل المشترك الأكبر:

$$1)\ 10x^3 + 6x, \quad 2)\ 12x^2y - 6xy - 30xy^2, \quad 3)\ (x-4)(2a-b) + (x+4)(2a-b).$$

الحل:

1) نلاحظ في الفقرة الأولى أن (أ.ع.م) بين $10x^3$ و $6x$ هو $2x$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$10x^3 + 6x = 2x(5x^2) + 2x(3) = 2x(5x^2 + 3)$$

2) في هذه الفقرة نلاحظ أن (أ.ع.م) بين الحدود الثلاثة هو $6xy$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$12x^2y - 6xy - 30xy^2 = 6xy(2x) - 6xy(1) - 6xy(5y) = 6xy(2x - 1 - 5y) = 6xy(2x - 5y - 1)$$

3) هنا نلاحظ أن (أ.ع.م) هو كثير الحدود $2a-b$ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

$$(x-4)(2a-b)+(x+4)(2a-b)=(2a-b)\left[(x-4)+(x+4)\right]=(2a-b)(x-4+x+4)$$
$$=(2a-b)(2x)=2x(2a-b)$$

هناك حالات يتم فيها التحليل بتجميع حدود معينة كما هو موضح في المثال التالي.

مثال 9: حلل كثيرة الحدود التالي: $6y^3-21y^2-4y+14$

الحل:

نقوم أولا بتجميع الحدين الأولين وتجميع الحدين الأخيرين كالتالي:

$$6y^3-21y^2-4y+14=(6y^3-21y^2)-(4y-14)$$

ثم نأخذ (أ.ع.م) لكل من المجموعتين كالتالي:

$$6y^3-21y^2-4y+14=(6y^3-21y^2)-(4y-14)=3y^2(2y-7)-2(2y-7)$$

وفي الأخير نلاحظ أن $2y-7$ أصبح عامل مشترك بين المجموعتين فإذا يصبح التحليل كما يلي:

$$6y^3-21y^2-4y+14=(6y^3-21y^2)-(4y-14)=3y^2(2y-7)-2(2y-7)$$
$$=(2y-7)(3y^2-2)$$

2.3 طريقة تحليل كثيرة الحدود ax^2+bx+c

الحالة الأولى: $a=1$

في هذه الحالة يجب أن نوجد كثيري حدود يكون حاصل ضرب حديهما الأول يساوي x^2 وحاصل ضرب حديهما الثاني يساوي c وجمعهما الجبري يساوي b. المثال التالي يوضح هذه الطريقة.

مثال 10: حلل كثيرة الحدود التالي: $x^2+7x-18$

الحل:

في هذه الحالة $b=7$ و $c=-18$ إذا يجب البحث عن عددين حاصل ضربيهما يساوي -18 وجمعهما الجبري يساوي 7. فالعددين حسب الشرطين المذكورين هما -2 و 9 لأن: $7=9+(-2)$ و $-18=9\times(-2)$.. وهكذا يصبح التحليل كما يلي:

$$x^2+7x-18=(x-2)(x+9)$$

ويمكن التأكد من هذا الحل بفك الأقواس.

في حالة عدم استطاعة إيجاد العددين حسب الشرطين المذكورين نحاول التحليل بطرق أخرى سنذكرها في هذا الفصل.

الحالة الثانية: $a \neq 1$

في هذه الحالة نبحث عن أربعة أعداد صحيحة m, n, p, q تحقق الشروط الثلاثة التالية:

$$1)\, mn = a \;,\; 2)\, pq = c \;,\; 3)\, mq + np = b$$

وعند إيجاد هذه الأعداد يكون التحليل كما يلي:

$$ax^2 + bx + c = (mx + p)(nx + q)$$

مع الملاحظة أن إشارة p و q تكون نفس إشارة b إذا كان $c > 0$ ومختلفتان إذا كان $c < 0$. يتم اختيار m و n على أساس الشرط (1 و يتم اختيار p و q على أساس الشرط (2 ثم نستخدم الشرط (3 للتأكد من صحة الأعداد m, n, p, q.

مثال 11: حلل كثيرة الحدود التالي: $6x^2 + 11x + 3$

الحل:

يجب إيجاد الأعداد الصحيحة m, n, p, q حيث: $mn = 6, pq = 4, mq + np = 11$

مع العلم أن إشارة p و q موجبة لأن $c > 0$ و $b > 0$ وبطريقة التجربة والخطأ نجد في الأخير أن: $m = 2, n = 3, p = 3, q = 1$ إذ□ يكون التحليل كما يلي:

ملاحظة: حتى يكون $ax^2 + bx + c$ قابلا للتحليل بمعاملات صحيحة يجب أن تكون القيمة $b^2 - 4ac$ مربعا كاملا. فمثلا $6x^2 - 5x - 4$ قابل للتحليل لأن $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(6)(-4) = 121 = 11^2$.

إذا كان $p = q$ و $m = n$ فنقول إن $ax^2 + bx + c$ هو مربع كامل وتحليله يساوي $(mx + p)^2$

3.3 طريقة تحليل فرق مربعين

في هذه الطريقة نستخدم إحدى القوانين المشهورة التي ذكرناها في بداية هذا الباب وهي:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

مثال 12: حلل $49x^2 - 144$

الحل:

يمكن كتابة $49x^2 - 144$ على شكل $49x^2 - 144 = (7x)^2 - (12)^2$ وهذا يسمح لنا بتطبيق القانون المذكور أعلاه ويصبح التحليل كالتالي: $49x^2 - 144 = (7x)^2 - (12)^2 = (7x + 12)(7x - 12)$

4.3 طريقة تحليل فرق وجمع مكعبين

هنا كذلك نستخدم قانونين لم نذكرهما من قبل وهما قانونا فرق وجمع مكعبين:

$$1)\ x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2), \qquad 2)\ x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2).$$

مثال 13: حلل كلا من: $1)\ 8a^3+b^3, \quad 2)\ a^3-64.$

الحل:

1) يمكن كتابة $8a^3+b^3$ على شكل $8a^3+b^3=(2a)^3+(b)^3$ وهذا يسمح لنا بتطبيق القانون 2) ويصبح التحليل كما يلي:

$$8a^3+b^3=(2a)^3+(b)^3=(2a+b)[(2a)^2-(2a)(b)+(b)^2]$$
$$=(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$$

2) يمكن كتابة a^3-64 على شكل $a^3-64=(a)^3-(4)^3$ وهذا يسمح لنا بتطبيق القانون 1) ويصبح التحليل كالتالي:

$$a^3-64=(a)^3-(4)^3=(a-4)[(a)^2+(a)(4)+(4)^2]=(a-4)(a^2+4a+16)$$

5.3 طريقة التحليل بتجميع الحدود

تستوجب هذه الطريقة شيئا من الخبرة لمعرفة الحدود التي يجب تجميعها.

مثال 14: حلل كلا مما يلي بطريقة التجميع:. $1)\ 2m^2+6mn-15n-5m, \quad 2)\ p^2+p-q-q^2$

الحل: يتم التجميع والتحليل كما يلي:

$$1)\ 2m^2+6mn-15n-5m=(2m^2+6mn)+(-15n-5m)$$
$$=2m(m+3n)-5(3n+m)=(m+3n)(2m-5)$$

$$2)\ p^2+p-q-q^2=p^2-q^2+p-q=(p^2-q^2)+(p-q)$$
$$=(p+q)(p-q)+(p-q)=(p-q)(p+q+1)$$

تمارين

تمرين 1: *اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:*

تحليل كثيرة الحدود $x^2-9x+20$ هو a) $(x+10)(x+2)$ b) $(x+5)(x+4)$ c) $(x-5)(x-4)$ d) $(x+10)(x+10)$	1
تحليل كثيرة الحدود x^2+7x+6 هو a) $(x+3)(x+2)$ b) $(x-5)(x-2)$ c) $(x+6)(x+1)$ d) $(x-1)(x-6)$	2
تحليل كثيرة الحدود $x^2+2x-24$ هو a) $(x+4)(x+6)$ b) $(x-4)(x+6)$ c) $(x-8)(x+3)$ d) $(x+6)(x-5)$	3
تحليل كثيرة الحدود $6x^4+14x^3-12x^2$ هو a) $2x^2(3x^2+7x-6)$ b) $2(3x^2+7x-6)$ c) $(x+3)(x^2+2)$ d) $(7x+3)(2x+4)$	4
تحليل كثيرة الحدود x^2-36 هو a) $(x+36)(x-36)$ b) $(x+6)(x-6)$ c) $(x+4)(x^2-9)$ d) $(x^2+6)(x^2-6)$	5

تمرين 2: حلل كلا مما يلي باستخدام الطريقة المناسبة:

1) $-15x^2-12x$,	12) x^4+11x^2+18,	23) $1+y^{12}$,
2) $6a^3b^2-12a^2b+72ab^3$,	13) $9x^4+10x^2+1$,	24) $8-x^6$,
3) $(x-4)(m+2n)+n(x-4)$,	14) $6x^4+23x^2+15$,	25) $(x-2)^3-1$,
4) $x(y-3)-5(3-y)$,	15) x^2-9,	26) $(a+b)^3+(a-b)^3$,
5) $3x^3+x^2+6x+2$,	16) $81b^2-16c^2$,	27) $27-(x+1)^6$,
6) $2x^2-2xy+x-y$,	17) x^4-9,	28) $5xy+20y-15x-60$,
7) $10z^3-15z^2-4z+6$,	18) $16y^4-196$,	29) $4x^2+2x-y-y^2$,
8) $6m^3+4m^2-15m-10$,	19) $1-121n^2$,	30) $x^2+6x+9-y^2$,
9) $x^2+9x+20$,	20) $x^2-(y+z)^2$,	31) $4x^2-9y^2+4x+1$,
10) $b^2+12b-28$,	21) x^3-8,	32) $27x^3-6x^2+2x-1$,
11) $8a^2-26a+15$,	22) p^3+64,	33) $8x^3+12x^2+6x+1$,

4. الكسور الجبرية (العبارات النسبية)

تعريف 8: كما أن الأعداد النسبية هي عبارة عن قسمة عددين صحيحين فالكسور الجبرية تعتبر قسمة كثيري حدود.

مثال 15: تعتبر $\frac{3x+1}{2x-5}$ و $\frac{x^2-3x+4}{x^2+7x+12}$ كسور جبرية.

مجال الكسر الجبري هو كل الأعداد الحقيقية باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي الصفر لأن القسمة في هذه الحالة تكون غير معرفة.

مثال 16: مجال $\frac{2x}{x^2-3x}$ هو كل الأعداد الحقيقية دون $x=3$ و $x=0$ لأن قيمة المقام عند هذه النقاط تساوي الصفر.

نظرية 2: خصائص الكسور الجبرية هي كالتالي:

$$1)\frac{P}{Q}=\frac{R}{S}\Leftrightarrow PS=QR,\quad 2)\frac{P}{Q}=\frac{PR}{QR}\quad,\quad R\neq 0,\qquad 3)-\frac{P}{Q}=\frac{-P}{Q}=\frac{P}{-Q}\quad 4)\frac{P}{Q}\pm\frac{R}{Q}=\frac{P\pm R}{Q},$$

$$5)\frac{P_1}{Q_1}\pm\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1\times Q_2\pm P_2\times Q_1}{Q_1\times Q_2},\quad 6)\frac{P}{Q}\times\frac{R}{S}=\frac{PR}{QS}\quad,\quad 7)\frac{P}{Q}\div\frac{R}{S}=\frac{P}{Q}\times\frac{S}{R}=\frac{PS}{QR}\quad,\quad R\neq 0.$$

اختصار الكسور الجبرية

عملية اختصار الكسر الجبري هو حذف المعاملات المشتركة في البسط والمقام. فإذا عملية الاختصار تتطلب منا الإدراك الجيد بعمليات التحليل التي مرت بنا في هذا الباب.

مثال 17: اختصر ما يلي: $\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$

الحل:

أولا نقوم بتحليل البسط والمقام بالطرق التي مرت بنا سابقا كالتالي:

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3)\quad,\quad x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

إذن يختصر الكسر كالتالي:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x-1}{x+2}\,,\qquad x+3\neq 0\Rightarrow x\neq -3$$

ملاحظة: $\frac{x+6}{2}\neq x+3$ وإنما $\frac{x+6}{2}=\frac{x}{2}+\frac{6}{2}=\frac{x}{2}+3$

مثال 18 : اختصر كل مما يلي:

$$1)\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\cdot\frac{x-1}{x-2},\qquad 2)\frac{x^2+6x+9}{x^3+27}\div\frac{x^2+7x+12}{x^3-3x^2+9x}$$

الحل:

$$1)\ \frac{x^2-5x+6}{x^2+x-2}\times\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+2)}\times\frac{x-1}{x-2}=\frac{(x-2)(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-2)}=\frac{x-3}{x+2}\ ,\ x\neq 1\ x\neq 2$$

$$2)\ \frac{x^2+6x+9}{x^3+27}\div\frac{x^2+7x+12}{x^3-3x^2+9x}=\frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)(x^2-3x+9)}\div\frac{(x+4)(x+3)}{x(x^2-3x+9)}$$

$$=\frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)(x^2-3x+9)}\times\frac{x(x^2-3x+9)}{(x+4)(x+3)}$$

$$=\frac{(x+3)(x+3)x(x^2-3x+9)}{(x+3)(x^2-3x+9)(x+4)(x+3)}=\frac{x}{x+4}\ ,\quad x\neq -3$$

مثال 19 : احسب ما يلي:

$$1)\ \frac{2mn+m}{m+n}-\frac{mn+m}{m+n},\qquad 2)\ \frac{x}{x+1}+\frac{3}{2x-1},\qquad 3)\ \frac{x}{x^2-4}-\frac{2x-1}{x^2-3x-10}.$$

الحل:

في مثل هذه المسائل بعد تحليل المقام (إذا كان ذلك ممكنا) يجب أن نبحث عن أصغر مقام مشترك.

$$1)\ \frac{2mn+m}{m+n}-\frac{mn+m}{m+n}=\frac{(2mn+m)-(mn+m)}{m+n}=\frac{2mn+m-mn-m}{m+n}=\frac{mn}{m+n}$$

$$2)\ \frac{x}{x+1}+\frac{3}{2x-1}=\frac{x(2x-1)+3(x+1)}{(x+1)(2x-1)}=\frac{2x^2-x+3x+3}{(x+1)(2x-1)}=\frac{2x^2+2x+3}{(x+1)(2x-1)}$$

$$3)\ \frac{x}{x^2-4}-\frac{2x-1}{x^2-3x-10}=\frac{x}{(x-2)(x+2)}-\frac{2x-1}{(x-5)(x+2)}=\frac{x(x-5)-(2x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

$$=\frac{(x^2-5x)-(2x^2-4x-x+2)}{(x-2)(x+2)(x-5)}=\frac{x^2-5x-2x^2+4x+x-2}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

$$=\frac{-x^2-2}{(x-2)(x+2)(x-5)}=-\frac{x^2+2}{(x-2)(x+2)(x-5)}$$

هناك حالات يكون فيها بسط ومقام الكسر الجبري عبارة عن كسور جبرية. لاختصار مثل هذا الكسر يجب أولا اختصار كل من البسط والمقام ثم نواصل عملية الاختصار بنفس الطريقة المذكورة سابقا.

مثال 20: اختصر ما يلي:

$$1)\ \frac{\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x}}{\frac{3x}{x-5}-\frac{2}{x-5}}, \qquad 2)\frac{x-y^{-1}}{x^{-1}-y}.$$

الحل:

$$1)\ \frac{\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x}}{\frac{3x}{x-5}-\frac{2}{x-5}}=\frac{\frac{2x+1(x-2)}{x(x-2)}}{\frac{3x-2}{x-5}}=\frac{\frac{2x+x-2}{x(x-2)}}{\frac{3x-2}{x-5}}=\frac{\frac{3x-2}{x(x-2)}}{\frac{3x-2}{x-5}}=\frac{3x-2}{x(x-2)}\cdot\frac{x-5}{3x-2}$$

$$=\frac{(3x-2)(x-5)}{x(x-2)(3x-2)}=\frac{x-5}{x(x-2)},\ x\neq\frac{2}{3}$$

$$2)\ \frac{x-y^{-1}}{x^{-1}-y}=\frac{x-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-y}=\frac{\frac{xy-1}{y}}{\frac{1-xy}{x}}=\frac{xy-1}{y}\cdot\frac{x}{1-xy}=\frac{(xy-1)(x)}{y(1-xy)}=$$

$$=\frac{(-1)(1-xy)(x)}{y(1-xy)}=\frac{(-1)(x)}{y}=-\frac{x}{y}$$

ملاحظة: من الخطأ اختصار $\frac{2x^2+y}{3x^2}$ و $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{z^{-1}}$ كما يلي:

$$\frac{x^{-1}+y^{-1}}{z^{-1}}=\frac{z}{x+y} \quad \text{و} \quad \frac{2x^2+y}{3x^2}=\frac{2+y}{3}$$

تمارين

تمرين 1 : *اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:*

1	اختصار الكسر الجبري $\frac{x^2+9x-10}{x^2-100}$ هو a) $x+10$ b) $\frac{x-1}{x-10}$ c) $\frac{9x-10}{100}$ d) $\frac{9x}{10}$
2	تبسيط الكسر $\frac{10x^3y^2}{2x^5y}$ هو a) xy b) $\frac{5y}{x^2}$ c) $5xy$ d) $5x^8y^3$
3	اختصار الكسر الجبري $\frac{x^2+2x}{x+2}$ هو a) $\frac{x}{2}$ b) x c) $\frac{2x+1}{x}$ d) $\frac{1}{x}$
4	تبسيط الكسر $\frac{15x^2y^2}{5xy^5}$ هو a) xy b) $3xy^3$ c) $\frac{3x}{y^3}$ d) $5x^8y^3$
5	تبسيط الكسر $\frac{15x^2y^2}{5xy^5}$ هو a) xy b) $3xy^3$ c) $\frac{3x}{y^3}$ d) $5x^8y^3$
6	اختصار الكسر الجبري $\frac{x^2-4}{x+2}$ هو a) $\frac{x}{2}$ b) $x-2$ c) $\frac{2x+1}{x}$ d) $\frac{1}{x}$

تمرين 2: اختصر الكسور الجبرية التالية:

1) $\frac{x^2-4}{(x-2)(x+3)}$, 2) $\frac{x^2-x-20}{3x-15}$, 3) $\frac{x^3-9x}{x^3+x^2-6x}$, 4) $\frac{a^3+8}{a^2-4}$,

5) $\frac{x^2+3x-40}{-x^2+3x+10}$, 6) $\frac{10x^2-3x-1}{2x^2+5x-3}$, 7) $\frac{2x^3-6x^2+5x-15}{9-x^2}$, 8) $\frac{x^3-x^2+x}{x^3+1}$.

تمرين 3: احسب واختصر كلا مما يلي:

$$1)\frac{x^2+x}{2x+3}\cdot\frac{3x^2+19x+28}{x^2+5x+4},\qquad 2)\frac{x^2-16}{x^2+7x+12}\cdot\frac{x^2-4x-21}{x^2-4x},$$

$$3)\frac{12m^2+28m+15}{6m^2+35m+25}\cdot\frac{2m^2-m-3}{3m^2+11m-20},\qquad 4)\frac{6u^2-5u+1}{3u^2+11u-4}\div\frac{2u^2+3u-2}{u^2+3u-4},$$

$$5)\frac{z^2-81}{z^2-16}\div\frac{z^2-z-20}{z^2+5z-36},\qquad 6)\frac{2a^2-5a+3}{a^2+a-2}\div\frac{3a^2-8a-3}{a^2-a-6}.$$

تمرين 4: احسب واختصر كلا مما يلي:

$$1)\frac{9x+1}{2x-1}-\frac{3x+4}{2x-1},\qquad 2)\frac{x+1}{2x+3}+\frac{2x-1}{2x-3},\qquad 3)\frac{x}{x^2-9}-\frac{3x-1}{x^2+7x+12},$$

$$4)\frac{1}{x}+\frac{2}{3x-1}\cdot\frac{3x^2+11x-4}{x-5},\qquad 5)\frac{x+1}{x-3}-\frac{2x}{x-3}\div\frac{x+5}{x-3},\qquad 6)\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(3-\frac{1}{x}\right).$$

تمرين 5: احسب واختصر كلا مما يلي:

$$1)\frac{2}{2x+1}-\frac{3}{3x+1}+\frac{4}{4x+1},\qquad 2)\frac{1}{x^2+7x+12}+\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{x^2-16},$$

$$3)\frac{2}{x^2-3x+2}+\frac{3}{x^2-1}-\frac{5}{x^2+3x-10},\qquad 4)\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2x}{x+2}-\frac{2x-1}{x^2-4}.$$

رياضيات تخصصية

المحددات و المصفوفات

اسم الوحدة: المحددات والمصفوفات

الجدارة: معرفة الحددات والمصفوفات والقدرة على حساب المحددات وأداء العمليات على المصفوفات..

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على:

- أداء العمليات على المصفوفات.
- حساب المحددات.
- حساب مقلوب مصفوفة مربعة.

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة 80٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: عشرساعات.

المحددات والمصفوفات

يبدو أن أول استخدام للمصفوفات كان في الكتاب الصيني "تسعة كتب في الحساب" قبيل بداية التاريخ الميلادي، بينما أول المحددات استخدمت من طرف الياباني *Seki Kōwa* سنة 1683م..

وتعد المحددات والمصفوفات موضوعا رئيسيا في أحد فروع الرياضيات المسمى بالجبر الخطي.

و من تطبيقاتها: حل المعادلات الخطية وحل المسائل باستخدام الحاسوب.

1. تعريف المصفوفات:

تعريف 1: مصفوفة أعداد حقيقية من الرتبة $m \times n$ هي قائمة أعداد حقيقية، تسمى عناصرها، ومرتبة على شكل صفوف وأعمدة، بحيث عدد الصفوف يساوي m وعدد الأعمدة يساوي n .

يمكن الإشارة إلى أنّ المصفوفات 1×1 هي أعداد حقيقية.

مثال 1: المصفوفات التالية من الرتبة 2×3 ، 3×2 ، 4×1 ، 1×5 ، و 3×3 على الترتيب:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & 12 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \\ 10 & 12 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 2 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} -0.6 & 2 & 17 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0.7 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

تساوي مصفوفتين:

تعريف 2: تكون مصفوفتان من الرتبة نفسها متساويتين إذا تساوت عناصرهما (الموافقة) على الترتيب..

مثال 2: نعتبر مصفوفات المعطاة في المثال السابق والمصفوفتين التاليتين:

$$F=\begin{pmatrix} 3+2 & 2 & -1\times 3 \\ 1 & 0 & 0.7 \\ 2 & 2-6 & 0 \end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0.7 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \neq B$ لأنهما من رتبتين مختلفتين، وكذلك $E \neq G$ لأنه يوجد عنصران غير متساويين (الصف الثاني والعمود الثاني)، بينما $E = F$.

2. عمليات على المصفوفات:

1.2 الجمع والطرح:

تعريف 3: حاصل جمع (أو طرح) مصفوفتين من الرتبة نفسها هو مصفوفة من الرتبة نفسها، وكل عنصر من عناصرها هو مجموع (أو طرح) العنصرين الموافقين له من المصفوفتين.

مثال 3: إذا كان لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

فاحسب ما يلي:

$$1)\ A+B, \qquad 2)\ B-A.$$

الحل:

$$1)\ A+B=\begin{pmatrix} 2-2 & 4+0 & 7+1 \\ -6+3 & 3+4 & -1+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2)\ B-A=\begin{pmatrix} -2-2 & 0-4 & 1-7 \\ 3-(-6) & 4-3 & 7-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -4 & -6 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

نظرية 1: جمع المصفوفات تبديلي وتجميعي.

مثال 4: نعتبر المصفوفات المعطاة في المثال السابق. احسب ما يلي:

$$1)\ B+A, \qquad 2)\ B+(A+B), \qquad 3)\ B+B+A.$$

الحل:

1) نستخدم نتيجة الفقرة 1 من المثال السابق وبأن الجمع تبديلي:

$$B+A=A+B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

2) نستخدم نتيجة الفقرة 1 من هذا المثال وبأن الجمع تجميعي:

$$B+(A+B)=(B+A)+B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 9 \\ 0 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

3) نستخدم نتيجة الفقرة 2 من هذا المثال وبأن الجمع تبديلي وتجميعي:

$$B+B+A=B+A+B=B+(A+B)=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 9 \\ 0 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

2.2 ضرب مصفوفة في عدد حقيقي أو القسمة عليه :

تعريف 4: ضرب (أو قسمة) مصفوفة في (أو على) عدد حقيقي هو مصفوفة من الرتبة نفسها ، وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب (أو قسمة) العنصر الموافق له من المصفوفة (الأصلية) في (أو على) العدد الحقيقي.

مثال 5: ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -2\\ 3 & 0.4\end{pmatrix}.$$

فاحسب ما يلي:

$$1)\ 3A,\qquad 2)\ -A+2B,\qquad 3)\ \frac{B}{-2}.$$

الحل:

$$1)\ 3A=3\times\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times3 & 3\times0\\ 3\times1 & 3\times2\\ 3\times6 & 3\times5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 3 & 6\\ 18 & 15\end{pmatrix}$$

$$2)\ -A+2B=-1\times\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -2\\ 3 & 0.4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -1 & -2\\ -6 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -4\\ 6 & 0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -6\\ 0 & -4.2\end{pmatrix}$$

$$3)\ \frac{B}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -2\\ 3 & 0.4\end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix}\frac{0.5}{-2} & \frac{1}{-2}\\ \frac{0}{-2} & \frac{-2}{-2}\\ \frac{3}{-2} & \frac{0.4}{-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.25 & -0.5\\ 0 & 1\\ -1.5 & -0.2\end{pmatrix}$$

نظرية 2: ضرب مصفوفة في عدد حقيقي تبديلي وتجميعي (أي بالنسبة للضرب في عدد آخر).

مثال6 : نعتبر مصفوفات المعطاة في المثال السابق. احسب ما يلي:

$$1)\ A\times 3\qquad 2)\ 1.5(2A)$$

الحل:

1) نستخدم نتيجة الفقرة 1 من المثال السابق وبأنّ العملية تبديلية:

$$A \times 3 = 3A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 6 \\ 18 & 15 \end{pmatrix}$$

2) نستخدم نتيجة الفقرة 1 من المثال السابق وبأنّ العملية تجميعية:

$$1.5(2A) = (1.5 \times 2)A = 3A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 6 \\ 18 & 15 \end{pmatrix}$$

3.2 ضرب صف في عمود:

تعريف 5: حاصل ضرب صف في عمود له عدد العناصر نفسه هو مجموع حواصل ضرب كل عنصر من الصف في العنصر الموافق له من العمود، وهذا الضرب ليس تبديليا.

مثال 7: احسب ما يلي:

$$1)\ a = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad 2)\ b = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

الحل:

$$1)\ a = (1 \times (-3)) + ((-2) \times 1) + (0 \times 4) + (0.3 \times 10) = -3 - 2 + 0 + 3 = -2$$

2) لا يمكن حساب b لأنّ عدد عناصر الصف لا يساوي عدد عناصر العمود.

تجدر الإشارة إلى أنّه يمكن حساب ضرب العمود في الصف بعد التعريف اللاحق فقط.

4.2 ضرب مصفوفتين:

تعريف 6: حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة $m \times k$ في مصفوفة من الرتبة $k \times n$ (أي أنّ عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية) هو مصفوفة من الرتبة $m \times n$، وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب الصف الموافق له من المصفوفة الأولى في العمود الموافق له من المصفوفة الثانية.

مثال 8**:** ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 5 & -1 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 30\\ 15 & 0 & -12\\ 23 & 3 & 6\end{pmatrix}.$$

احسب ما يلي:

$$1)\ AB,\qquad 2)\ BA,\qquad 3)\ BC.$$

الحل:

$$1)\ AB=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}5 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}5 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 15 & -3\end{pmatrix}$$

$$2)\ BA=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0 & 3\\ 8 & -3 & 6\\ -4 & 5 & -6\end{pmatrix}$$

3) لا يمكن حساب الضرب لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى هو 2 بينما عدد صفوف الثانية هو 3.

ملاحظة: من نتائج الفقرتين 1 و 2 من المثال السابق يمكن استنتاج أنّ: $AB \neq BA$ أي أن عملية ضرب المصفوفات غير تبديلي.

نظرية 3**:** ضرب المصفوفات تجميعي ولكنه ليس تبديليا.

مثال 9**:** احسب ما يلي وقارن مع الفقرة 1 من المثال 7:

$$A=\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 4\\ 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0.3\end{pmatrix}$$

الحل:

$$A=\begin{pmatrix} -3\times1 & -3\times-2 & -3\times0 & -3\times0.3 \\ 1\times1 & 1\times-2 & 1\times0 & 1\times0.3 \\ 4\times1 & 4\times-2 & 4\times0 & 4\times0.3 \\ 10\times1 & 10\times-2 & 10\times0 & 10\times0.3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 & -0.9 \\ 1 & -2 & 0 & 0.3 \\ 4 & -8 & 0 & 1.2 \\ 10 & -20 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ومنه نستنتج أنّ:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

أي أنّ ضرب صف في عمود لا يساوي ضرب هذا العمود في الصف السابق لأن الصف هو عبارة عن مصفوفة $1\times n$ والعمود هو عبارة عن مصفوفة $n\times 1$ وضرب المصفوفات ليس تبديلي.

مثال 10 **:** ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0.5 \end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

احسب ما يلي:

$$1)\ (AB)C,\qquad 2)\ A(BC).$$

الحل:

$$1)\ (AB)C=\begin{pmatrix} -3 & 0 & -0.5 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$$

2) نستخدم نتيجة الفقرة 1 من هذا المثال وبأن العملية تجميعية:

$$A(BC)=(AB)C=\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$$

نظرية 4**:** جمع المصفوفات توزيعي بالنسبة لضربهما ، أي أنّ:

$$1)\ (A+B)C=AC+BC$$

$$2)\ A(B+C)=AB+AC$$

وهذا بالنسبة لثلاث مصفوفات A و B و C من الرتب المواتية لهذه العمليات.

منقول المصفوفة :

تعريف 7 : منقول مصفوفة A من الرتبة $m \times n$ هو المصفوفة A^t من الرتبة $n \times m$ ، بحيث صفوف الثانية هي أعمدة الأولى وأعمدة الثانية هي صفوف الأولى .

مثال 11 : احسب منقول كل من المصفوفات المعطاة في المثال السابق.

الحل:

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \qquad C^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. بعض المصفوفات الخاصة :

1.3 المصفوفة المربعة :

تعريف 8 : تكون المصفوفة A مربعة إذا كان عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها.

مثال 12 : ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

المصفوفات B و A مصفوفات مربعة 2×2 والمصفوفات D و C مصفوفات مربعة 3×3 بينما المصفوفة E ليست مصفوفة مربعة

2.3 مصفوفة الوحدة:

تعريف 9 : مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة ، وكل عناصر قطرها الرئيسي تساوي 1 وكل العناصر الأخرى تساوي الصفر.ويرمز لها بالرمز I_n إذا كانت من الرتبة $n \times n$ ، أو بالرمز I إذا لم يكن هناك التباس في رتبتها.

مثال 13 **:**

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نظرية 5 **:** مصفوفة الوحدة عنصر حيادي في ضرب المصفوفات.

مثال 14 **:** احسب كلا مما يلي:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

الحل:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad 2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. تعريف المحددات:

تعريف 10 **:** المحدد من الرتبة $n \times n$ هو عدد حقيقي نتحصل عليه من المصفوفة المربعة وذلك باستخدام قواعد حسابية معينة. ونرمز له بالرمز $\det(A)$.

يمكن الإشارة إلى أنّ قيمة المحددات 1×1 تساوي عنصرها.

1.4 حساب المحددات 2×2 :

تعريف 11 **:** المحدد 2×2 للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي (النازل) ناقص حاصل ضرب عناصر القطر غير الرئيسي (الصاعد)، أي أنّ:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال 15 **:** احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix}2 & 4\\1 & 3\end{vmatrix},\qquad 2)\begin{vmatrix}1 & -1\\5 & 0\end{vmatrix}$$

الحل:

$$1)\begin{vmatrix}2 & 4\\1 & 3\end{vmatrix}=(2\times 3)-(4\times 1)=6-4=2,\qquad 2)\begin{vmatrix}1 & -1\\5 & 0\end{vmatrix}=(1\times 0)-(5\times -1)=0-(-5)=5$$

2.4 **حساب المحددات** 3×3 **:**

تعريف 12 **:** المحدد 3×3 للمصفوفة المربعة A هو مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار الرئيسية الثلاثة (النازلة) ناقص مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار غير الرئيسية الثلاثة (الصاعدة)، و نتحصل على هذه الأقطار بإضافة عمودين مماثلين للعمودين الأول والثاني على الترتيب.

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ فإن:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\\a_{31} & a_{32}\end{matrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

مثال 16 **:** احسب المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix}1 & 3 & 9\\2 & 6 & 3\\8 & 7 & 4\end{vmatrix},\qquad 2)\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\5 & 1 & -3\\0 & -2 & 4\end{vmatrix}.$$

الحل:

$$1)\begin{vmatrix}1 & 3 & 9\\2 & 6 & 3\\8 & 7 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 9\\2 & 6 & 3\\8 & 7 & 4\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 3\\2 & 6\\8 & 7\end{matrix}$$
$$=(1\times 6\times 4)+(3\times 3\times 8)+(9\times 2\times 7)-(8\times 6\times 9)-(7\times 3\times 1)-(4\times 2\times 3)$$
$$=24+72+126-432-21-24=-255$$

$$2)\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{matrix}$$

$$= (-1\times 1\times 4) + (0\times -3\times 0) + (2\times 5\times -2) - (0\times 1\times 2) - (-2\times -3\times -1) - (4\times 5\times 0)$$

$$= -4 + 0 - 20 - 0 - (-6) - 0 = -18$$

مثال 17 **:** احسب محددات المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix},\quad E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1,\qquad \det(B) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{matrix} = -2 + 0 + 0 - (-12) - 0 - 0 = 10$$

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \\ 6 & 1 \end{matrix} = 0 + 0 - 20 - 72 - 0 - 15 = -107$$

بينما لا يمكن حساب $\det(E)$ لأنّ E ليست مصفوفة مربعة.

نظرية 6**:** محدد حاصل ضرب مصفوفتين مربعتين هو حاصل ضرب محدديهما.

مثال 18 **:** نعتبر مصفوفات المعطاة في المثال السابق. احسب المحددات التالية:

$$1)\ \det(AB),\qquad 2)\ \det(BA),\qquad 3)\ \det(CD),\qquad 4)\ \det(DC).$$

الحل:

لا نحتاج إلى حساب ضرب المصفوفات لأن المطلوب هو حساب المحددات فقط. نستخدم نتائج المثال السابق:

$$1)\ \det(AB) = \det(A) \times \det(B) = 1 \times -5 = -5$$
$$2)\ \det(BA) = \det(B) \times \det(A) = -5 \times 1 = -5$$
$$3)\ \det(CD) = \det(C) \times \det(D) = 10 \times -107 = -1070$$
$$4)\ \det(DC) = \det(D) \times \det(C) = -107 \times 10 = -1070$$

5. مقلوب المصفوفة :

تعريف 13 **:** مقلوب مصفوفة مربعة A هو المصفوفة المربعة A^{-1} - إن وجدت – بحيث حاصل ضربهما هو مصفوفة الوحدة، أي أنّ:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

لحساب مقلوب المصفوفة نعرف هنا مصفوفات خاصة أخرى لم نعرفها من قبل هما مصفوفة المعاملات المرفقة والمصفوفة القرينة

1.5 مصفوفة المعاملات المرفقة:

تعريف 14 **:** المعامل المرفق بالعنصر a من مصفوفة مربعة A هو محدد المصفوفة التي نتحصل عليها بحذف الصف والعمود الموافقين للعنصر a من المصفوفة A ، مضروبا في الإشارة المناسبة لموقع a (في المصفوفة A) كما هو موضح أدناه بالنسبة للمصفوفات 2×2 و 3×3 و 4×4 (وقس على ذلك):

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

في هذه الحالة، يمكن تشكيل مصفوفة المعاملات المرفقة بالترتيب الموافق لعناصرها في المصفوفة الأصلية. يرمز لها بالرمز $cofA$.

مثال 19 **:** احسب مصفوفة المعاملات المرفقة لكل مما يلي:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

الحل:

$$1)\ cofA=\begin{pmatrix} +0 & -2 \\ -(-1) & +3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2)\ cofB=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & 2 & -11 \\ 12 & -6 & 3 \\ -2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

2.5 المصفوفة القرينة:

تعريف 15**:** المصفوفة القرينة لمصفوفة مربعة A هي منقول مصفوفة المعاملات المرفقة.

يرمز لها بالرمز $adjA$.

مثال 20**:** احسب المصفوفة القرينة لكل من مصفوفات المعطاة في المثال السابق.

الحل:

$$1)\ adjA=(cofA)^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2)\ adjB=(cofB)^t=\begin{pmatrix} -14 & 12 & -2 \\ 2 & -6 & -4 \\ -11 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

نظرية 7**:** إذا كان محدد مصفوفة مربعة A لا يساوي صفرا فإنّها تقبل مقلوبا وحيدا هو حاصل قسمة مصفوفتها القرينة على محددها، أي أنّ:

$$A^{-1}=\frac{adjA}{\det(A)}$$

مثال 21**:** احسب مقلوب كل من المصفوفات المعطاة في المثال السابق.

الحل:

1) يجب أن نحسب أولا محدد المصفوفة:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0-(-2)=2\neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن المصفوفة تقبل مقلوبا نحسبه باستخدام نتائج الفقرة 1 من المثال السابق:

$$A^{-1}=\frac{adjA}{\det(A)}=\frac{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix}0 & 0.5\\ -1 & 1.5\end{pmatrix}$$

2) يجب أن نحسب أولا محدد المصفوفة:

$$\det(B)=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 4 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 4 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{matrix}\right|\begin{matrix}1 & 3\\ -1 & 4\\ 2 & 3\end{matrix}=-8+12-6-16-6-6=-30\neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن المصفوفة تقبل مقلوبا نحسبه باستخدام نتائج الفقرة 2 من المثال السابق:

$$B^{-1}=\frac{adjB}{\det(B)}=\frac{\begin{pmatrix}-14 & 12 & -2\\ 2 & -6 & -4\\ -11 & 3 & 7\end{pmatrix}}{-30}=\begin{pmatrix}\frac{7}{15} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{15}\\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{5} & \frac{2}{15}\\ \frac{11}{30} & -\frac{1}{10} & -\frac{7}{30}\end{pmatrix}$$

مثال 22**:** احسب مقلوب المصفوفات التالية:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 5 & -1\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix},\qquad 2)\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 10\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad 3)\ C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\qquad 4)\ D=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}.$$

الحل:

1) الخطوة الأولى: نحسب المحدد:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 5 & -1\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 5 & -1\\ 0 & 4 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1 & 0\\ -2 & 5\\ 0 & 4\end{matrix}=5+0-24-0-(-4)-0=-15\neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن المصفوفة تقبل مقلوبا ونستأنف في الحساب.

الخطوة الثانية: نحسب مصفوفة المعاملات المرافقة :

$$cofA=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}5 & -1\\4 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & -1\\0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & 5\\0 & 4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 3\\4 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 3\\5 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\-2 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\-2 & 5\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 2 & -8\\12 & 1 & -4\\-15 & -5 & 5\end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة: نحسب المصفوفة القرينة:

$$adjA=(cofA)^t=\begin{pmatrix}9 & 12 & -15\\2 & 1 & -5\\-8 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

الخطوة الرابعة: نحسب المقلوب:

$$A^{-1}=\frac{adjA}{\det(A)}=\frac{\begin{pmatrix}9 & 12 & -15\\2 & 1 & -5\\-8 & -4 & 5\end{pmatrix}}{-15}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1\\-\frac{2}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{3}\\\frac{8}{15} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

2) الخطوة الأولى: نحسب المحدد:

$$\det(B)=\begin{vmatrix}1 & -2 & 10\\0 & 2 & 5\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 10\\0 & 2 & 5\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & -2\\0 & 2\\0 & 0\end{matrix}=0+0+0-0-0-0=0$$

بما أنّ المحدد يساوي الصفر فإن المصفوفة لا تقبل مقلوبا ونتوقف عن الحساب.

3) الخطوة الأولى: نحسب المحدد:

$$\det(C)=\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$$

بما أنّ المحدد لا يساوي الصفر فإنّ المصفوفة تقبل مقلوبا ونستأنف في الحساب.

الخطوة الثانية: نحسب مصفوفة المعاملات المرافقة:

$$cofC=\begin{pmatrix}+4 & -3\\-2 & +1\end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة: نحسب المصفوفة القرينة:

$$adjC=(cofC)^t=\begin{pmatrix}4 & -2\\-3 & 1\end{pmatrix}$$

الخطوة الرابعة: نحسب المقلوب:

$$C^{-1}=\frac{adjC}{\det(C)}=\frac{\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}$$

4) الخطوة الأولى: نحسب المحدد:

$$\det(D)=\begin{vmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-6-(-6)=0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فإن المصفوفة لا تقبل مقلوبا ونتوقف عن الحساب.

مقلوب مصفوفة 2×2 **:**

نظرية 8**:** إذا كانت a و b و c و d أربعة أعداد حقيقية بحيث $ad-bc\neq 0$ لا يساوي الصفر فإنّ:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}}{ad-bc}=\frac{\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}$$

أي أنّ هذا القانون يسمح لنا بحساب مقلوب مصفوفة 2×2 عندما يكون محددها لا يساوي الصفر.

مثال 23**:** أعد حساب مقلوب المصفوفات 2×2 التالية باستخدام النظرية 8:

$$1)\,A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\qquad 2)\,B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

الحل:

1) محدد المصفوفة A لا يساوي الصفر إذن:

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}0 & -(-1)\\ -2 & 3\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix}0 & 0.5\\ -1 & 1.5\end{pmatrix}$$

2) محدد المصفوفة B لا يساوي الصفر إذن:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}$$

3) محدد المصفوفة C يساوي الصفر إذن لا يوجد مقلوبا.

تمارين

تمرين 1 : ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ 2 & 6 & -5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}10 & -2 & -6\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}0.5 & 12 & -2\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}.$$

احسب ما يلي:

$$1)\ A-2B+C,\qquad 2)\ -2C+3A,\qquad 3)\ B-A+3C.$$

تمرين 1 : احسب حاصل ضرب المصفوفات التالية:

$$1)\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix},\qquad 2)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 3 & 5\\ -1 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix},$$

$$3)\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -4\\ 0 & 3 & 7 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 4 & -1\\ 3 & 7\end{pmatrix},\qquad 4)\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ -1 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 2 & 5 & -3\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

تمرين 3 : احسب كلا من المحددات التالية:

$$1)\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix},\qquad 2)\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -1\end{vmatrix},\qquad 3)\begin{vmatrix}0 & 7\\ 3 & 6\end{vmatrix},$$

$$4)\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix},\qquad 5)\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 5\end{vmatrix},\qquad 6)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

تمرين 4 : لتكن لدينا المصفوفة التالية:

$$M=\begin{pmatrix}6 & 12\\ 12 & -6\end{pmatrix}$$

احسب ما يلي:

$$1)\ \det(M).\qquad 2)\ M^2=MM.\qquad 3)\ M^3=MMM.$$

تمرين 5 : احسب مقلوب كل مصفوفة مما يلي:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -6\end{pmatrix},\qquad 2)\ B=\begin{pmatrix}5 & -10\\ -1 & 2\end{pmatrix},\qquad 3)\ C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -5 & 10 & 0\\ -3 & 14 & 0\end{pmatrix},$$

$$4)\ D=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3\\ 0 & -2 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix},\qquad 5)\ E=\begin{pmatrix}1 & 10 & 9\\ 2 & 11 & 12\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

تمرين 6 : لتكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}-5 & 9\\ 6 & -6\end{pmatrix}.$$

أوجد المصفوفات P و Q و R بحيث:

$$1)\ P=2A+B^2,\qquad 2)\ AQ+BQ=I,\qquad 3)\ RA=C.$$

تمرين 7 : احسب مقلوب المصفوفة التالية:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

تمرين 8 : احسب المصفوفة التالية:

$$B=A^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}A$$

رياضيات تخصصية

المعادلات

اسم الوحدة: المعادلات

الجدارة: معرفة المعادلات والقدرة على حلها.

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على:

- حل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية؛
- حل المعادلات الخطية ذات مجهول واحد؛
- حل المعادلات الخطية ذات مجهولين؛
- حل المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل.

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة 80٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: اثناتي عشر ساعة.

الفصل الأول: المعادلات

درس المصريون والبابليون المعادلات منذ الألفية الثانية قبل بداية التاريخ الميلادي. ولكن الذي أسس لهذا الفن هو محمّد الخوارزمي في كتابه "الجبر والمقابلة" في نهاية القرن الثاني وبداية القرن الثالث الهجري (حوالي سنة 825م) والذي يعتبر المؤسس لأحد فروع الرياضيات المسمى بالجبر. وكان الحافز لكتابة هذا الكتاب هو حل مسائل الفرائض أو المواريث بطريقة رياضية.

وتكمن أهمية المعادلات في إمكانية صياغة كثير من المسائل التطبيقية على شكل معادلات.

1. تعريف المعادلات

تعريف 1: المعادلة هي التساوي بين عبارتين (كثيري حدود). وتكون هذه المعادلة إما صحيحة لقيم معينة للمجهول وخاطئة لقيم أخرى.

مثال 1: المعادلة $2x+1=7$ تكون صحيحة عندما $x=3$ وخاطئة لأية قيمة أخرى لـ x. إذن نقول إن $x=3$ هو حل للمعادلة لأنه عند تعويض x بالقيمة 3 تصبح المعادلة $2(3)+1=7$ وهذا صحيح.

إذن عملية حل معادلة هي إيجاد كل قيم المتغير التي تستوفي المعادلة، وعادة ما نسمي هذه القيم حلول أو جذور المعادلة.

مثال 2: $x=3$ و $x=2$ هي حلول للمعادلة $x^2-5x+6=0$.

المعادلات المتكافئة هي المعادلات التي تكون لها نفس الحلول وتتم عملية حل معادلة في متغير x بإيجاد سلسلة من المعادلات المتكافئة للمعادلة الأصلية حتى نصل إلى معادلة من الشكل: $x=$ *ثابت*.

لإيجاد هذه المعادلات المتكافئة عادة ما نتبع الطرق التالية:

- اختصار العبارات في طرفي المعادلة إما بجمع الحدود المتشابهة أو بخصائص أخرى مثل التبديلية، التجميعية والتوزيعية: $2x+3+5x=-11$ و $7x+3=-11$ معادلتان متكافئتان.
- طرح أو إضافة نفس القيمة إلى طرفي المعادلة: $3x-7=2$ و $3x=9$ معادلتان متكافئتان.
- ضرب أو قسمة طرفي المعادلة بنفس العدد بشرط أن لا يكون هذا العدد يساوي صفراً:
  $\frac{5}{6}x=10$ و $x=12$ معادلتان متكافئتان

2. حل المعادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد :

تعريف 2 : معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد هي معادلة خطية ذات مجهول واحد (سنتطرق إليها أكثر تفصيلا في الفصل الثاني) وهي معادلة يمكن كتابتها على الشكل:

$ax+b=0$ حيث a و b عددان حقيقيان و $a \neq 0$

مثال 3: حل المعادلات التالية: $1)\,2x+5=9,\quad 2)\,\frac{3}{4}x-6=0,\quad 3)\,(x+2)(5x+1)=5x(x+1).$

الحل:

1) يتم حل هذه المعادلة بطرح 5 من طرفي المعادلة ثم بقسمة طرفي المعادلة على 2:

$$2x+5-5=9-5 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=4$$

2) هنا نضيف 6 إلى طرفي المعادلة ثم نضرب في $\frac{4}{3}$ لنتخلص من الكسر $\frac{3}{4}$:

$$\frac{3}{4}x-6=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x-6+6=0+6 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x=6 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}x\right)=\left(\frac{4}{3}\right)(6) \Leftrightarrow x=8$$

3) نقوم أولا بفك الأقواس ثم نطرح على التوالي 2 , $5x$, $5x^2$ من طرفي المعادلة وفي الأخير نقسم على 6:

$$(x+2)(5x+1)=5x(x+1) \Leftrightarrow 5x^2+11x+2=5x^2+5x \Leftrightarrow 11x+2=5x$$

$$\Leftrightarrow 6x+2=0 \Leftrightarrow 6x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$$

ملاحظة: يمكن التأكد من الحل بتعويضه في المعادلة الأصلية.

في حالة وجود متغير في المقام يجب أن نستثني في البداية القيم التي تجعل المقام يساوي الصفر قبل أن نتخلص من المقام. وإذا كانت قيمة الحل في الأخير تساوي إحدى القيم التي استثنيناها في بداية الحل فنرفضها كحل للمعادلة وإذا كانت هي الحل الوحيد فنستنتج أن المعادلة ليس لها حل.

مثال 4: حل المعادلات التالية:

$$1)\,\frac{x}{x-3}=\frac{24-5x}{x-3},\qquad 2)\,1+\frac{x}{x-5}=\frac{5}{x-5}.$$

الحل:

1) أولا يجب أن ندرك أن $x \neq 3$ لأن هذه القيمة تجعل من المقام صفرا. ثم نضرب طرفي المعادلة في $(x-3)$ لنتخلص من المقام ثم نتبع الخطوات التي ذكرناها سابقا.

$$(x-3)\frac{x}{x-3}=(x-3)\frac{24-5x}{x-3} \Leftrightarrow x=24-5x \Leftrightarrow x+5x=24-5x+5x$$
$$\Leftrightarrow 6x=24 \Leftrightarrow \frac{6x}{6}=\frac{24}{6} \Leftrightarrow x=4$$

وهذا يعتبر حلاً مقبولاً لأنه يختلف عن العدد 3 الذي استثنيناه من الحل.

2) هنا كذلك يجب أن ندرك أن $x \neq 5$ لأن هذه القيمة تجعل من المقام صفرا. لنتخلص من المقام نضرب طرفي المعادلة في $(x-5)$ ثم نتبع الخطوات التي ذكرناها سابقا.

$$(x-5)\left(1+\frac{x}{x-5}\right)=(x-5)\left(\frac{5}{x-5}\right) \Leftrightarrow (x-5)1+(x-5)\left(\frac{x}{x-5}\right)=(x-5)\left(\frac{5}{x-5}\right)$$
$$\Leftrightarrow x-5+x=5 \Leftrightarrow 2x-5=5 \Leftrightarrow 2x-5+5=5+5 \Leftrightarrow 2x=10 \Leftrightarrow x=5$$

لكن هنا نلاحظ أن قيمة الحل هي القيمة التي تجعل المقام يساوي صفرا فإذن الحل $x=5$ مرفوض وفي هذه الحالة نقول أن المعادلة الأصلية ليس لها حلا.

تمارين

حل المعادلات التالية وتأكد من الحل:

1) $2x+10=40$,
2) $-3y+20=2$,
3) $4x-11=7x+20$,
4) $4(2x-17)+5(3x-8)=0$,
5) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$,
6) $\frac{1}{2}x+7-\frac{1}{4}x=\frac{19}{2}$,
7) $5(x+3)(x-3)=5x(x-1)$,
8) $\frac{40-3x}{5x}=\frac{6x+7}{8}$,
9) $\frac{3}{x+2}=\frac{5}{2x-7}$,
10) $\frac{x}{x-3}=\frac{x+4}{x+2}$,
11) $\frac{x+3}{x+5}=\frac{x-3}{x-4}$,
12) $2+\frac{9}{m-3}=\frac{3m}{m-3}$,
13) $\frac{4x-3}{2x}=\frac{2x-4}{x-2}$,
14) $\frac{12+x}{-4}=\frac{5x-7}{3}+2$,
15) $\frac{3x}{x+4}=2-\frac{12}{x+4}$,
16) $\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}=\frac{4}{x-3}$,
17) $5[x-(4x-5)]=3-2x$,
18) $6[3y-2(y-1)]-2+7y=0$,
19) $[2+(y+1)^2]=(y+2)^2$,
20) $(y+3)^2=(y+4)^2+1$,
21) $(z-7)^2=(z-2)^2+9$.

3. حل المعادلات من الدرجة الثانية :

تعريف 3 : معادلة من الدرجة الثانية هي معادلة يمكن كتابتها على الشكل القياسي التالي:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

هناك عدة طرق يمكن استخدامها لحل معادلة من الدرجة الثانية وسنتطرق إلى بعض منها في هذا الباب.

1.3 طريقة التحليل

إذا كان من الممكن تحليل كثيرة الحدود $ax^2 + bx + c$ باستخدام أعداد صحيحة فيمكن حينئذ تطبيق خاصية صفر حاصل الضرب كالتالي: $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ أو $B = 0$

مثال 5: حل المعادلات التالية: $1)\, x^2 + 8x + 15 = 0, \qquad 2)\, 2x^2 + x - 6 = 0.$

الحل:

1) باستخدام طرق التحليل التي سبق أن رأيناها في هذا الفصل نجد أن

$$x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$$

وباستخدام خاصية صفر حاصل الضرب يكون الحل كما يلي:

$$x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5) = 0 \Leftrightarrow \{x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ أو } x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5\}$$

إذن حلول المعادلة $x^2 + 8x + 15 = 0$ هي $x = -3$ و $x = -5$. وجدنا حلين لأن المعادلة من الدرجة الثانية ويمكن التأكد من الحلول بتعويضها في المعادلة الأصلية.

2) يكون التحليل هنا بالبحث عن قيم للأعداد m, n, p, q لأن $a \neq 1$ ويكن الحل كالتالي:

$$2x^2 + x - 6 = (2x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} \\ x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \end{cases}$$

إذن حلول المعادلة $2x^2 + x - 6 = 0$ هي $x = -2$ و $x = \dfrac{3}{2}$

2.3 طريقة الجذر التربيعي

إذا كانت A و B عبارتين جبريتين حيث: $A^2 = B$ و $B > 0$ إذن $A = \pm\sqrt{B}$.

مثال 6: حل المعادلات التالية: $1)\, x^2 - 5 = 0, \qquad 2)\, (x+1)^2 = 49,$

الحل:

1) بعد إضافة 5 إلى طرفي المعادلة يمكن حلها بطريقة الجذر التربيعي كالتالي:

$$x^2-5+5=0+5 \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$$

إذن الحلول هي: $x=\sqrt{5}$ و $x=-\sqrt{5}$

2) هنا يمكن تطبيق الطريقة مباشرة كالتالي:

$$(x+1)^2=49 \Leftrightarrow x+1=\pm\sqrt{49} \Leftrightarrow x+1=\pm 7 \Leftrightarrow x+1=7 \text{ أو } x+1=-7$$
$$\Leftrightarrow x=7-1=6 \text{ أو } x=-7-1=-8$$

إذن الحلول هي: $x=6$ و $x=-8$.

3. طريقة القانون العام (طريقة المميز):

تتلخص طريقة القانون العام في حساب $\Delta=b^2-4ac$ ونسمي هذه القيمة بالمميزوتكون:

حلول المعادلة: $a\neq 0$, $ax^2+bx+c=0$ هي $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ولأن قيمة المميز $\Delta=b^2-4ac$ موجودة تحت الجذر فهناك ثلاث حالات هي كالتالي:

- إذا كانت القيمة $\Delta=b^2-4ac$ موجبة فهناك حلان حقيقيان مختلفان: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- إذا كانت القيمة $\Delta=b^2-4ac$ تساوي الصفر فهناك حلان حقيقيان متشابهان: $x=\dfrac{-b}{2a}$
- إذا كانت القيمة $\Delta=b^2-4ac$ سالبة فليست هناك حلول حقيقية.

مثال 7: حل المعادلات التالية:

$$1)\, 2x^2-5x+2=0, \quad 2)\, x^2+6x+9=0, \quad 3)\, 3x^2+6x+7=0.$$

الحل:

1) في هذه الحالة $c=2$ $b=-5$ $a=2$ إذن:

$$b^2-4ac=(-5)^2-4(2)(2)=25-16=9>0$$

إذاً فهناك حلان حقيقيان مختلفان وهما:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2(2)}=\frac{5\pm 3}{4} \Leftrightarrow x=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2 \text{ أو } x=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

2) في هذه الحالة $a=1 \quad b=6 \quad c=9$ إذن:

$$b^2-4ac=(6)^2-4(1)(9)=36-36=0$$

إذاً فهناك حلان حقيقيان متشابهان وهما : $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(6)}{2(1)}=-3$

3) في هذه الحالة $a=3 \quad b=6 \quad c=7$ إذن:

$$b^2-4ac=(6)^2-4(3)(7)=36-84=-48<0$$

إذن هذه المعادلة ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

تمارين

تمرين 1: *اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:*

1	حل المعادلة $3x-3=2x+6$ هو a) $x=3$ حل وحيد b) $x=9$ حل وحيد c) عدد لانهائي من الحلول d) مستحيلة الحل
2	حل المعادلة $\frac{6x-5}{2}=3x+1$ هو a) $x=3$ حل وحيد b) $x=-4$ حل وحيد c) عدد لانهائي من الحلول d) مستحيلة الحل
3	حل المعادلة $x^2-5x+6=0$ هو a) $x=2$, $x=3$ b) $x=-2$ c) $x=-2$, $x=0$ d) لا يوجد حلول حقيقية
4	حل المعادلة $2x^2-4x+3=0$ هو a) $x=-2$, $x=2$ b) $x=-4$, $x=3$ c) $x=1$, $x=1$ d) لا يوجد حلول حقيقية
5	حل المعادلة $x^2-4=0$ هو a) $x=4$, $x=-4$ b) $x=2$, $x=-2$ c) $x=-2$, $x=8$ d) لا يوجد حلول حقيقية
6	حل المعادلة $x^2+3x=0$ هو a) $x=5$, $x=1$ b) $x=-5$, $x=3$ c) $x=0$, $x=-3$ d) لا يوجد حلول حقيقية

تمرين 2: حل المعادلات التالية بطريقة التحليل

1) $x^2-2x-15=0,$ 2) $8y^2+189y-72=0,$ 3) $3x^2-7x=0,$

4) $8+14t-15t^2=0,$ 5) $(x-5)^2-9=0,$ 6) $(2x-5)^2-(4x-11)^2=0.$

تمرين 3: حل المعادلات التالية بطريقة الجذر التربيعي

1) $x^2=81,$ 2) $2x^2-48=0,$ 3) $(x-5)^2=36,$

4) $(x-8)^2=(x+1)^2,$ 5) $x^2=(x+1)^2,$ 6) $4x^2=(2x+3)^2.$

تمرين 4: حل المعادلات التالية بطريقة المميز

1) $x^2-2x-15=0,$ 2) $x^2+x-1=0,$ 3) $2x^2+4x+1=0,$

4) $3x^2-5x+3=0,$ 5) $x^2+3x-1=0,$ 6) $2x^2-5x+3=0,$

7) $-x^2=7x-1,$ 8) $2x^2+3x+5=0,$ 9) $2x^2+5x-3=0.$

الفصل الثاني :المعادلات الخطية

1. تعريف المعادلات الخطية :

تعريف 1 **:** تعبير خطي لمتغيرات ما هو مجموع حواصل ضرب هذه المتغيرات في أعداد حقيقية.

مثال 1 **:** هذه تعابير خطية للمتغيرات x و y و z الموجودة فيها :

$$1)\ -x + 2.5y + 3x$$
$$2)\ y + \sqrt{3}\,x - 2y + z$$
$$3)\ 2x - y + 3z$$

وهذه تعابير غير خطية للمتغيرات x و y و z الموجودة فيها :

$$1)\ x + xy - z$$
$$2)\ x^2 + x + 1$$
$$3)\ \sqrt{x} + y + z$$

تعريف 2**:** معادلة خطية لمجاهيل معينة هو معادلة تحتوي على تعابير خطية لهذه المجاهيل وثوابت فقط.

مثال 2**:** هذه معادلات خطية للمجاهيل x و y و z الموجودة فيها :

$$1)\ -x + 2.5y + 3x - 6 = z - 2y + 3$$
$$2)\ 2x - y + 3z = -2$$
$$3)\ x + 3.5y = 6$$

وهذه معادلات غير خطية للمجاهيل x و y و z الموجودة فيها :

$$1)\ x + xy - z = 0$$
$$2)\ x^2 + x + 1 = 3$$
$$3)\ \sqrt{x} + y + z = -y + z + 10$$

تعريف 3**:** جملة معادلات خطية (أو نظام خطي) هو مجموعة من المعادلات الخطية مأخوذة في نفس الوقت.
لا يحتاج إلى استخدام كلمة جملة عندما تكون لدينا معادلة واحدة فقط.

مثال 3**:** هذه جملة 4 معادلات خطية للمجاهيل x و y و z :

$$1)\ -x + 3y + 2z = 2$$
$$2)\ 3x - 6y + z = -3$$
$$3)\ 2x + y - 5z = 10$$
$$4)\ x \qquad + 3z = 0$$

تعريف 4: حل جملة معادلات خطية هو إيجاد كل القيم الممكنة للمجاهيل بحيث تتحقق كل المعادلات المعتبرة. وهذا الحل له ثلاث حالات فقط:

الحالة الأولى: جملة المعادلات الخطية تقبل حلا وحيدا، وذلك عندما يكون لكل مجهول قيمة واحدة فقط تحقق في مجملها كل المعادلات المعتبرة.

الحالة الثانية: جملة المعادلات الخطية مستحيلة الحل، وذلك عندما لا توجد قيمة لكل مجهول تحقق بمجملها كل المعادلات المعتبرة.

الحالة الثالثة: جملة المعادلات الخطية لها عدد لانهائي من الحلول، وذلك عندما يوجد عدد لانهائي من القيم لمجهول واحد على الأقل وقيم للمجاهيل الأخرى تحقق بمجملها كل المعادلات المعتبرة (أي عندما لا تكون الحالتين الأوليين)..

2. المعادلات الخطية ذات مجهول واحد:

قد مرت علينا هذه المعادلات في الفصل الأول ولكن في حالة خاصة وسندرس هنا حالتها العامة.

مثال 4: حل كل من المعادلات الخطية التالية:

$$1)\ -x+3=2x-6 \qquad 2)\ 3.5x+4=7x-3-3.5x \qquad 3)\ 2(3-x)=-2x+6$$

الحل:

1) الخطوة الأولى: نضع المجهول في طرف والثوابت في طرف آخر:

$$-x-2x=-6-3$$

الخطوة الثانية: نبسّط الطرفين:

$$-3x=-9$$

الخطوة الثالثة: نستنتج حل المعادلة: المعادلة لها حل وحيد هو:

$$x=\frac{-9}{-3}=3$$

2) الخطوة الأولى:

$$3.5x-7x+3.5x=-3-4$$

الخطوة الثانية:

$$0=-7$$

الخطوة الثالثة: إذن المعادلة مستحيلة الحل.

3) الخطوة الأولى:

$$6-2x=-2x+6$$
$$-2x+2x=6-6$$

الخطوة الثانية:

$$0=0$$

الخطوة الثالثة: إذن المعادلة تقبل عدداً لا نهائياً من الحلول.

3. جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين:

1.3 الحل بطريقة التعويض:

الخطوة الأولى: نوجد عبارة أحد المجهولين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين.

الخطوة الثانية: نعوض عن هذا المجهول في المعادلة الأخرى.فنحصل على معادلة خطية ذات مجهول واحد.

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها منفردة.

الخطوة الرابعة: ثلاث حالات:

الحالة الأولى: إذا كان لهذه المعادلة حل وحيد فإن للجملة حلاً وحيداً نحصل عليه بالتعويض عن المجهول الثاني في عبارة المجهول الأول.

الحالة الثانية: إذا كانت هذه المعادلة مستحيلة الحل فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان لهذه المعادلة عدد لا نهائي من الحلول فإن للجملة عدد لا نهائي من الحلول.

مثال 5: حل كل من جمل المعادلات الخطية التالية:

$$1)\begin{cases}-2x+y=5\\3x-4y=-25\end{cases},\quad 2)\begin{cases}-2x+y=5\\x-0.5y=2\end{cases},\quad 3)\begin{cases}-2x+y=5\\x-0.5y=-2.5\end{cases}$$

الحل:

1) الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y=5+2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$3x-4(5+2x)=-25$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$3x-20-8x=-25$$
$$\Leftrightarrow 3x-8x=-25+20 \Leftrightarrow -5x=-5 \Leftrightarrow x=\frac{-5}{-5}=1$$

الخطوة الرابعة: تحصلنا على حل وحيد في الخطوة الثالثة إذن للجملة حل وحيد نحصل عليه بالتعويض:

$$y = 5 + 2x \Leftrightarrow y = 5 + (2 \times 1) = 7$$

خلاصة: حل الجملة هو:

$$x = 1, \qquad y = 7$$

2) الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y = 5 + 2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$x - 0.5(5 + 2x) = 2$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$x - 2.5 - x = 2 \Leftrightarrow x - x = 2 + 2.5 \Leftrightarrow 0 = 4.5$$

الخطوة الرابعة: المعادلة مستحيلة الحل إذن الجملة مستحيلة الحل.

3) الخطوة الأولى: نوجد عبارة y بدلالة x من المعادلة الأولى:

$$y = 5 + 2x$$

الخطوة الثانية: نعوض في المعادلة الثانية:

$$x - 0.5(5 + 2x) = -2.5$$

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها:

$$x - 2.5 - x = -2.5$$
$$\Leftrightarrow x - x = -2.5 + 2.5 \Leftrightarrow 0 = 0$$

الخطوة الرابعة: للمعادلة عدد لانهائي من الحلول إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

2.3 الحل بطريقة كرامير:

تعريف 5: ليكن لدينا جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين x و y على الشكل التالي:

$$a_1\, x + b_1\, y = c_1$$
$$a_2\, x + b_2\, y = c_2$$

بحيث أن المعاملات a_1 و a_2 و b_1 و b_2 والثوابت c_1 و c_2 هي أعداد حقيقية.

محدد الجملة D هو المحدد 2×2 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة، أي أن:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

محدد مجهول ما هو المحدد 2×2 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة، أي أن:

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

نظرية 1: حل جملة المعادلتين الخطيتين ذات المجهولين للتعريف السابق له ثلاث حالات فقط هي:

الحالة الأولى: إذا كان محدد الجملة لا يساوي الصفر فإن للجملة حل وحيد هو:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

الحالة الثانية: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان واحد (على الأقل) من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان كل محدد من محددات المجاهيل يساوي الصفر فإن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

مثال 6: أعد حل جمل المعادلات الخطية للمثال السابق بطريقة كرامير.

الحل:

1) نحسب محدد الجملة:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5 \neq 0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -25 & -4 \end{vmatrix} = -20 - (-25) = 5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -25 \end{vmatrix} = 50 - 15 = 35$$

بما أن محدد الجملة لا يساوي الصفر إذن للجملة حل وحيد هو:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{35}{5} = 7$$

2) نحسب محدد الجملة:

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -0.5\end{vmatrix}=1-1=0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & -0.5\end{vmatrix}=-2.5-2=-4.5\neq 0$$

بما أن محدد الجملة يساوي الصفر ومحدد x لا يساوي الصفر إذن الجملة مستحيلة الحل.

3) نحسب محدد الجملة:

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -0.5\end{vmatrix}=1-1=0$$

نحسب محددات المجاهيل:

$$D_x=\begin{vmatrix}5 & 1\\ -2.5 & -0.5\end{vmatrix}=-2.5-(-2.5)=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 1 & -2.5\end{vmatrix}=5-5=0$$

بما أن محدد الجملة يساوي الصفر ومحددات المجاهيل تساوي الصفر إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

مثال 7: حل جمل المعادلات الخطية التالية:

$$1)\begin{cases}2x+3y=4\\ x-y=-3\end{cases}\quad ,\ 2)\begin{cases}3x+2y=12\\ 5x-3y=1\end{cases}, \quad 3)\begin{cases}2x+8y=4\\ x+4y=14\end{cases}$$

الحل:

$$1)\ D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-3=-5\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4 & 3\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-4-(-9)=5,\qquad D_y=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-6-4=-10$$

إذن للجملة حل وحيد هو:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{5}{-5}=-1,\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-10}{-5}=2$$

$$2)\ D=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-9-10=-19\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}12 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-36-2=-38$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3 & 12\\ 5 & 1\end{vmatrix}=3-60=-57$$

إذن للجملة حل وحيد هو:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-38}{-19}=2$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-57}{-19}=3$$

$$3)\ D=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & 4\end{vmatrix}=8-8=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4 & 8\\ 14 & 4\end{vmatrix}=16-112=-96\neq 0$$

إذن الجملة مستحيلة الحل.

4. جمل المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل:

رغم أنه يمكن تعميم طريقة التعويض إلى هذه الحالة إلا أننا سنكتفي بطريقة كرامير وذلك لسهولتها.

تعريف 6**:** ليكن لدينا جملة 3 معادلات خطية ذات 3 مجاهيل x و y و z على الشكل التالي:

$$a_1\,x+b_1\,y+c_1\,z=d_1$$
$$a_2\,x+b_2\,y+c_2\,z=d_2$$
$$a_3\,x+b_3\,y+c_3\,z=d_3$$

بحيث أن المعاملات a_1 و a_2 و a_3 و b_1 و b_2 و b_3 و c_1 و c_2 و c_3 والثوابت d_1 و d_2 و d_3 هي أعداد حقيقية.

محدد الجملة D هو المحدد 3×3 بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة، أي أن:

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

محدد مجهول ما هو المحدد 3×3 بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة، أي أن:

$$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix},\qquad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix},\qquad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}$$

نظرية 2: حل جملة المعادلات الخطية ذات 3 مجاهيل للتعريف السابق له ثلاث حالات فقط هي:

الحالة الأولى: إذا كان محدد الجملة لا يساوي الصفر فإن للجملة حل وحيد هو:

$$x=\frac{D_x}{D}\qquad y=\frac{D_y}{D}\qquad z=\frac{D_z}{D}$$

الحالة الثانية: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان واحد (على الأقل) من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر وكان كل محدد من محددات المجاهيل يساوي الصفر فإن للجملة عدد لانهائي من الحلول.

مثال 8: حل جمل المعادلات التالية:

$$1)\begin{cases} x+y+z=6\\ 2x+3y+z=11\\ 3x+2y+2z=13\end{cases},\quad 2)\begin{cases} x+y+z=6\\ 2x+3y+z=11\\ -x-2y\quad =4\end{cases},\quad 3)\begin{cases} x+y+z=6\\ 2x+3y+z=11\\ -x-2y\quad =-5\end{cases}$$

الحل:

$$1)\ D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1\\ 2 & 3\\ 3 & 2\end{matrix}=6+3+4-9-2-4=-2\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1\\ 11 & 3 & 1\\ 13 & 2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1\\ 11 & 3 & 1\\ 13 & 2 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & 1\\ 11 & 3\\ 13 & 2\end{matrix}=36+13+22-39-12-22=-2$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1\\ 2 & 11 & 1\\ 3 & 13 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1\\ 2 & 11 & 1\\ 3 & 13 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 6\\ 2 & 11\\ 3 & 13\end{matrix}=22+18+26-33-13-24=-4$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6\\ 2 & 3 & 11\\ 3 & 2 & 13\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6\\ 2 & 3 & 11\\ 3 & 2 & 13\end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1\\ 2 & 3\\ 3 & 2\end{matrix}=39+33+24-54-22-26=-6$$

إذن للجملة حل وحيد ($D \neq 0$) هو:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-2} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-4}{-2} = 2, \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$2)\ D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{matrix} = 0 - 1 - 4 - (-3) - (-2) - 0 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 6 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 6 & 1 \\ 11 & 3 \\ 4 & -2 \end{matrix} = 0 + 4 - 22 - 12 - (-12) - 0 = -18 \neq 0$$

إذن الجملة مستحيلة الحل (لأن $D_x \neq 0$, $D = 0$).

$$3)\ D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{matrix} = 0 - 1 - 4 - (-3) - (-2) - 0 = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 6 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 6 & 1 \\ 11 & 3 \\ -5 & -2 \end{matrix} = 0 - 5 - 22 - (-15) - (-12) - 0 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ -1 & -5 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 6 \\ 2 & 11 \\ -1 & -5 \end{matrix} = 0 - 6 - 10 - (-11) - (-5) - 0 = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 11 \\ -1 & -2 & -5 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{matrix} = -15 - 11 - 24 - (-18) - (-22) - (-10) = 0$$

إذن للجملة عدد لانهائي من الحلول (لأن $D = D_x = D_y = D_z = 0$).

5. حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات:

يمكن أن نكتب أية جملة معادلات خطية على شكل معادلة مصفوفات، وذلك على الشكل التالي:

$$AU = C$$

بحيث A هي مصفوفة معاملات المجاهيل و U هي مصفوفة متكونة من عمود واحد عناصرها هي المجاهيل و C هي مصفوفة متكونة من عمود واحد عناصرها هي الثوابت

مثال 9: أعد كتابة جمل المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات:

$$1)\begin{cases}-2x+y=5\\3x-4y=-25\end{cases},\quad 2)\begin{cases}-2x+y=5\\x-0.5y=2\end{cases},\quad 3)\begin{cases}-2x+y=5\\x-0.5y=-2.5\end{cases}$$

الحل:

$$1)\begin{pmatrix}-2 & 1\\3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-25\end{pmatrix},\quad 2)\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & -0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix},\quad 3)\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & -0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2.5\end{pmatrix}$$

مثال 10: أعد كتابة جمل المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات:

$$1)\begin{cases}x+y+z=6\\2x+3y+z=11\\3x+2y+2z=13\end{cases},\quad 2)\begin{cases}x+y+z=6\\2x+3y+z=11\\-x-2y\quad=4\end{cases},\quad 3)\begin{cases}x+y+z=6\\2x+3y+z=11\\-x-2y\quad=-5\end{cases}$$

.الحل:

$$1)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\\3 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\11\\13\end{pmatrix},\quad 2)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\\-1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\11\\4\end{pmatrix},\quad 3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\\-1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\11\\-5\end{pmatrix}$$

نظرية 3: نعتبر جملة معادلات خطية مكتوبة باستخدام المصفوفات على الشكل التالي:

$$AU = C$$

بحيث مصفوفة المعاملات A تكون مربعة، أي أن عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات.

إذا كان محدد المصفوفة A، أي محدد الجملة، لا يساوي الصفر فإن للجملة حلا وحيدا هو:

$$U = A^{-1}C$$

مثال 11: أعد حل جمل المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات:

$$1)\begin{cases}-2x+y=5\\3x-4y=-25\end{cases},\quad 2)\begin{cases}-2x+y=5\\x-0.5y=2\end{cases},\quad 3)\begin{cases}-2x+y=5\\x-0.5y=-2.5\end{cases}$$

الحل:

1) الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8-3 = 5 \neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن للجملة حلا وحيدا ونستأنف في الحل.

الخطوة الثانية: نحسب مقلوب مصفوفة المعاملات:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة: نحسب حل الجملة:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

خلاصة: الحل هو:

$$x = 1, \qquad y = 7$$

2) الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = 1-1 = 0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فليس للجملة حل وحيد ونتوقف عن الحل

3) الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = 1-1 = 0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فليس للجملة حل وحيد ونتوقف عن الحل

مثال 12 **:** حل جملة المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات:

$$1)\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+3y+z=11 \\ 3x+2y+2z=13 \end{cases}, \quad 2)\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+3y+z=11 \\ -x-2y \quad =4 \end{cases}, \quad 3)\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+3y+z=11 \\ -x-2y \quad =-5 \end{cases}$$

الحل:

1) الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&2&2\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\2&3\\3&2\end{matrix}=6+3+4-9-2-4=-2\neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فإن للجملة حلا وحيدا ونستأنف في الحل.

الخطوة الثانية: نحسب مقلوب مصفوفة المعاملات:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&2&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{adj\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&2&2\end{pmatrix}}{-2}=\frac{\left(cof\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&2&2\end{pmatrix}\right)^t}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}+4&-1&+(-5)\\-0&+(-1)&-(-1)\\+(-2)&-(-1)&+1\end{pmatrix}^t}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}4&0&-2\\-1&-1&1\\-5&1&1\end{pmatrix}}{-2}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&2&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0.5&0.5&-0.5\\2.5&-0.5&-0.5\end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة: نحسب حل الجملة:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}6\\11\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0.5&0.5&-0.5\\2.5&-0.5&-0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\11\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

خلاصة: الحل هو:

$$x=1,\qquad y=2,\qquad z=3$$

2) الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-1&-2&0\end{vmatrix}=0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فليس للجملة حل وحيد ونتوقف عن الحل

3) الخطوة الأولى: نحسب محدد الجملة:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-1&-2&0\end{vmatrix}=0$$

بما أن المحدد يساوي الصفر فليس للجملة حل وحيد ونتوقف عن الحل

تمارين

تمرين 1 : حل المعادلات الخطية التالية:

1) $x-(2x+3)=\frac{x+2}{2}$ 2) $-6+2(1-x)=3x-4$ 3) $\frac{2}{x+3}=\frac{4}{1-x}$

4) $-2x+5=\frac{x-4}{2}$ 5) $5-6x+(3x-2)=-4(2+x)$ 6) $\frac{-x+2}{3+x}=-5$

تمرين 2 : حل جمل المعادلات الخطية التالية:

1) $\begin{cases}2x-3y=1\\-x+4y=0\end{cases}$, 2) $\begin{cases}4x+2y=-8\\-x-0.5y=2\end{cases}$, 3) $\begin{cases}-2x+4y=0\\x-2y=5\end{cases}$

4) $\begin{cases}4x+5y=9\\-x+3y=2\end{cases}$, 5) $\begin{cases}4x-5y=-9\\-8x+10y=18\end{cases}$, 6) $\begin{cases}4x-5y=-9\\-2x+2.5y=0\end{cases}$

تمرين 3 : حل جمل المعادلات الخطية التالية:

1) $\begin{cases}x+y+z=6\\-x+2y-z=0\\2x-3y+4z=2\end{cases}$, 2) $\begin{cases}3x+5y-z=10\\-x+2y+z=11\\5x+y-3z=-12\end{cases}$, 3) $\begin{cases}x-z=12\\-3x+2y=-3\\-6x+2y+3z=10\end{cases}$

4) $\begin{cases}x+2z=13\\-y+z=5\\x-y=0\end{cases}$, 5) $\begin{cases}-x+2y-z=-2\\x+15y-3z=11\\-y+2z=3\end{cases}$, 6) $\begin{cases}y+z=0\\x+y-z=10\\x+2y=-12\end{cases}$

رياضيات تخصصية

مفهوم الدالة ومنحناها

اسم الوحدة: مفهوم الدالة ومنحناها

الجدارة: معرفة مفهوم الدالة وأنواعها وبعض الدوال العددية المشهورة والقدرة على تمثيل منحنياتها.

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على معرفة:

- الدوال من غيرها وتحديد مجالها ومداها
- بعض الدوال الجبرية المشهورة.
- الدوال المثلثية الأساسية.
- الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- تمثيل منحنيات الدوال.

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة 80٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: ثمان ساعات.

مفهوم الدالة ومنحناها

استخدمت الدوال منذ القدم ولكنها لم تدرس كمفهوم رياضي إلا حديثا.

ومن تطبيقاتها: الدوال العددية المشهورة التي تدخل في كثير من القوانين التجريبية، وكذلك الدوال الخاصة بالبرمجة في الحاسوب.

1. تعريف الدالة:

تعريف 1: تكون علاقة f من مجموعة X إلى مجموعة Y دالة إذا كان كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y ، أي أنه من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 من X هما في علاقة مع عنصرين من Y يكون:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

حيث أن $f(x)$ يمثل العنصر الذي هو في علاقة مع x .

نسمي المجموعة X مجموعة المنطلق والمجموعة Y مجموعة الوصول والعنصر $y = f(x)$ صورة x بواسطة الدالة f والعنصر x أصل $y = f(x)$ بواسطة الدالة f ونقول أن $f(x)$ غير معرفة في Y إذا كان x ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أن $f(x)$ غير موجود في Y .

نرمز لهذه الدالة بالرمز: $f : X \to Y$

تجدر الإشارة إلى أن كل عنصر من مجموعة المنطلق له صورة واحدة على الأكثر، بينما قد يكون هناك عنصر من مجموعة الوصول له عدة أصول.

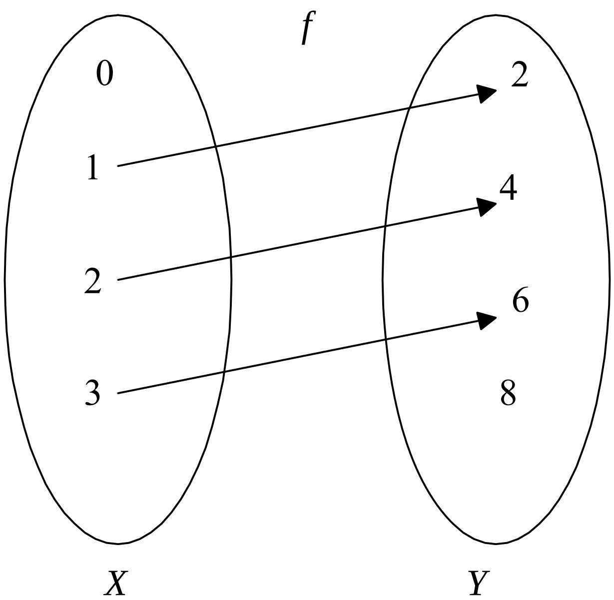
مثال 1: لتكن لدينا المجموعتان التاليتان:

$X = \{0,1,2,3\}$ و $Y = \{2,4,6,8\}$ والعلاقة f من X إلى Y بحيث:

$$f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 6$$

العلاقة f دالة لأن كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y .

يمكن تمثيل هذه الدالة بالمخطط السهمي التالي:



كما يمكن تعريف هذه الدالة كالتالي:

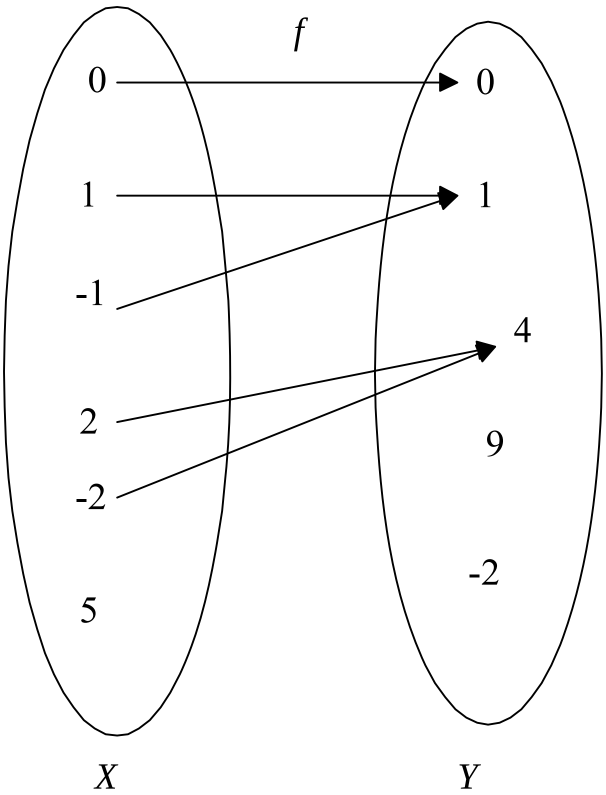
$f : X \to Y$ حيث: $f(x) = 2x$

مثال 2**:** لتكن لدينا المجموعتان التاليتان: $X = \{0,1,-1,2,-2,5\}$ و $Y = \{0,1,4,9,-2\}$ والعلاقة f من X إلى Y بحيث:

$$f(0)=0,\ f(1)=f(-1)=1,\ f(2)=f(-2)=4$$

العلاقة f دالة لأن كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y :
العناصر 0 و 1 و 1− و 2 و 2− في علاقة مع عنصر واحد فقط من Y بينما العنصر 5 ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أن $f(5)$ غير معرفة في Y .

يمكن تمثيل هذه الدالة بالمخطط السهمي التالي:



كما يمكن تعريف هذه الدالة كالتالي:

$$f : X \to Y$$

حيث: $f(x) = x^2$

ويمكن في هذه الحالة أن نبين بأن f هي دالة باستخدام العلاقة الموجودة في التعريف 1:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1)^2 = (x_2)^2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

مثال 3**:** لتكن لدينا المجموعتان التاليتان: *Cities* وهي مجموعة مدن العالم، و *Countries* وهي مجموعة بلدان العالم والعلاقة f من *Cities* إلى *Countries* بحيث: x هو عاصمة $f(x)$.

العلاقة f دالة لأن كل عنصر x من *Cities* وهو مدينة من المدن في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من *Countries*

إذا كان x عاصمة من العواصم فهو في علاقة مع بلده الموافق، وإذا كان x ليس عاصمة فهو ليس في علاقة مع أي عنصر من *Countries* . مثلا:

$$f(Riyadh) = Saudi\ Arabia$$
$$f(Algiers) = Algeria$$
$$f(Cairo) = Egypt$$
$$f(London) = United\ Kingdom$$

بينما $f(Abha)$ ليست معرفة في *Countries* لأن *Abha* ليست عاصمة دولة.

مثـــال 4: لـتكن لـدينا المجموعتـان الـسابقتان: $Cities$ و $Countries$ والعلاقـة g مـن $Cities$ إلى $Countries$ بحيث: $g(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x .

العلاقة g دالة لأن كل عنصر x من $Cities$ وهو مدينة من المدن في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من $Countries$. مثلا:

$$g(Riyadh) = Saudi\ Arabia$$
$$g(Algiers) = Algeria$$
$$g(Cairo) = Egypt$$
$$g(London) = United\ Kingdom$$
$$g(Abha) = Saudi\ Arabia$$

مثـــال 5: لـتكن لـدينا المجموعتـان الـسابقتان $Countries$ و والعلاقـة f مـن $Countries$ إلى $Cities$ بحيث: $f(x)$ هو مدينة من البلد x .

هذه العلاقة ليست دالة لأنه مثلا: البلد $Saudi\ Arabia$ في علاقة مع أكثر من مدينة.واحدة.

تعريف 2: مجال الدالة f (أو مجموعة تعريفها) هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة المنطلق والتي لها صورة بواسطة الدالة، ومدى الدالة f هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة الوصول والتي لها أصول بواسطة الدالة.

يرمز لمجال الدالة f بالرمز D_f ولمداها بالرمز R_f .

مثال 6: حدد مجال الدوال المعرفة في الأمثلة 1 إلى 4 ومداها.

الحل:

$$1)\ D_f = \{1,2,3\}, \qquad R_f = \{2,4,6\}$$
$$2)\ D_f = \{0,1,-1,2,-2\}, \qquad R_f = \{0,1,4\}$$

3) لو نعتبر مجموعة العواصم $Capitals$ فيكون:

$$D_f = Capitals \qquad R_f = Countries$$
$$4)\ D_g = Cities \qquad R_g = Countries$$

مثال 7: لتكن لدينا مجموعة الأعداد الطبيعية N والعلاقة f من N إلى N بحيث: $f(x) = 2x$.

1) بين أن f دالة. 2) حدد مجال f ومداها. 3) احسب $f(5)$ و $f(14)$.

الحل:

1) f دالة لأن:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

2) كل عدد طبيعي له صورة بواسطة f إذن: $D_f = \mathrm{N}$

بينما الأعداد الزوجية فقط هي التي لها أصول في N : $R_f = \{2,4,6,8,10,\cdots\}$

3) $f(5) = 2 \times 5 = 10$ و $f(14) = 2 \times 14 = 28$.

مثال 8**:** لتكن لدينا مجموعة الأعداد الحقيقية R والعلاقة g من R إلى R بحيث: $f(x) = 2x$.

1) بين بأن g دالة. 2) حدد مجال g ومداها. 3) احسب $g(2.5)$ و $g(5)$.

الحل:

1) g دالة لأن:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$$

2) كل عدد حقيقي له صورة بواسطة g إذن: $D_g = \mathrm{R}$

وكذلك كل الأعداد الحقيقية لها أصول في R إذن: $R_g = \mathrm{R}$ لأن: $y = 2 \times \frac{y}{2} = 2\left(\frac{y}{2}\right) = g\left(\frac{y}{2}\right)$

مثلا: $3 = g(1.5)$ و $0.6 = g(0.3)$.

3) $g(2.5) = 2 \times 2.5 = 5$ و $g(5) = 2 \times 5 = 10$.

تعريف 3**:** تكون دالتان f و g متساويتين إذا تحقق ما يلي:

1) $D_f = D_g$

2) $x \in D_f \Rightarrow f(x) = g(x)$

نرمز لذلك بالرمز: $f = g$.

مثال 9**:** هل الدالتان f و g المعرفتان في المثالين 3 و 4 على الترتيب متساويتان؟

الحل:

باستخدام نتائج الفقرتين 3 و 4 من المثال 6 فإن: $f \neq g$ لأن مجاليهما غير متساويين:

$$D_f = Capitals \neq D_g = Cities$$

مثال 10**:** هل الدالتان f و g المعرفتان في المثالين 7 و 8 على الترتيب متساويتان؟

الحل:

باستخدام نتائج المثالين 7 و 8 فإن: $f \neq g$ لأن مجاليهما غير متساويين:

$$D_f = \mathrm{N} \neq D_g = \mathrm{R}$$

مثال 11**:** لتكن لدينا الدالة التالية:

$$g\mathrm{:N} \to \mathrm{N}$$

حيث: $g(x) = x^2$

ونعتبر الدالة f المعرفة في المثال 7. هل $f = g$ ؟

الحل:

رغم أن الشرط الأول للتساوي (تعريف 3) متحقق وهو: $D_f = \mathrm{N} = D_g$

لاكن الشرط الثاني غير متحقق: مثلا $3 \in D_f = \mathrm{N}$ لكن $f(3) = 2 \times 3 = 6 \neq g(3) = 3^2 = 9$

ومنه فإن: $f \neq g$.

2. الدوال العددية:

تعريف 4: الدوال العددية هي الدوال التي تكون مجموعة وصولها مجموعة عددية.

مثال 12 : كل الدوال التالية هي دوال عددية.

$$1)\ f:\mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = x+1$$
$$2)\ f:\mathrm{N} \to \mathrm{N},\ f(x) = x+1$$
$$3)\ f:\mathrm{N} \to \mathrm{N},\ f(x) = \sqrt{x}$$
$$4)\ f:\mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = \sqrt{x}$$

تعريف 5: نقول عن دالة إنها:

1) فردية إذا كان: $f(-x) = -f(x)$ أو $f(-x) + f(x) = 0$ من أجل أي $x \in D_f$ و $-x \in D_f$.

2) زوجية إذا كان: $f(-x) = f(x)$ أو $f(-x) - f(x) = 0$ من أجل أي $x \in D_f$ و $-x \in D_f$.

مثال 13 : هل الدوال المعرفة في المثال السابق فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

الحل:

1) الدالة $f:\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $f(x) = x+1$ ليست فردية ولا زوجية لأن:

$$f(-x) + f(x) = (-x) + 1 + x + 1 = 2 \neq 0$$
$$f(-x) - f(x) = (-x) + 1 - (x+1) = -x + 1 - x - 1 = -2x \neq 0$$

الدالة $g:\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $g(x) = x^2$ زوجية لأن:

$$g(-x) - g(x) = (-x)^2 - x^2 = x^2 - x^2 = 0$$

2) الدالة $f:\mathrm{N} \to \mathrm{N}$ حيث $f(x) = x+1$ ليست فردية ولا زوجية لأنه إذا كان $x \in D_f = \mathrm{N}$ فإن $-x \notin D_f$.

الدالة $g:\mathrm{N} \to \mathrm{N}$ حيث $g(x) = x^2$ ليست فردية ولا زوجية لسبب مماثل للسبب السابق.

3) الدالة $f:\mathrm{N}\to \mathrm{N}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$ ليست فردية ولا زوجية لأنه إذا كان $x\in D_f=\mathrm{N}$ فإن $-x\notin D_f$.

4) الدالة $f:\mathrm{R}\to \mathrm{R}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$ ليست فردية ولا زوجية لأن مجالها لا يحتوي على الأعداد السالبة (السبب السابق).

3. منحنى الدالة:

يمكن تمثيل الدوال العددية التي يكون مجالها مجموعة عددية فيما يسمى بالمستوى الديكارتي وذلك بإتباع الخطوات التالية:

1) إنشاء جدول لقيم x (المعرفة) مرتبة من أصغرها إلى أكبرها وقيم $y=f(x)$ الموافقة لها.

2) رسم النقاط (x,y) الناتجة في المستوى الديكارتي.

3) وصل النقاط بعضها ببعض حسب ترتيبها بقطع مستقيمة إذا كانت القيم الموافقة للعنصر x لها صورة.

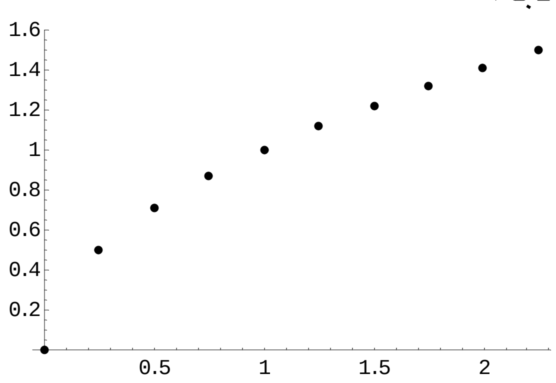
مثال 14: مثل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to \mathrm{R}$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$.

الحل:

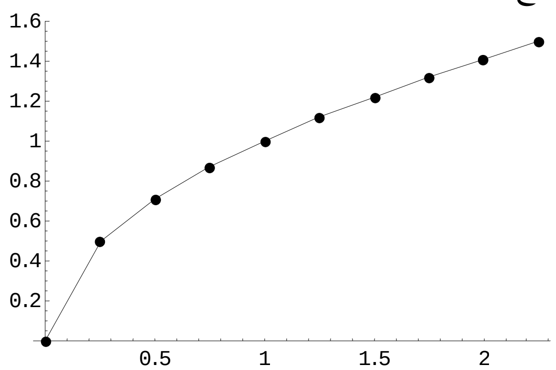
الخطوة الأولى: إنشاء جدول القيم:

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
$y=\sqrt{x}$	0.00	0.50	0.71	0.87	1.00	1.12	1.22	1.32	1.41	1.50

الخطوة الثانية: رسم النقاط الناتجة:



الخطوة الثالثة: وصل النقاط بقطع مستقيمة:



تجدر الإشارة إلى أنه كلما كان جدول القيم أكثر دقة وأكثر قيما كلما كان التمثيل أدق..
وهذا التمثيل يعطي لنا جزءا مما يسمى منحنى الدالة.

4. دوال خاصة

1.4 الدوال الجبرية:

تعريف 5: الدوال الجبرية هي الدوال التي يمكن تعريفها باستخدام كثيرات الحدود وعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة (المطولة).

وهي نوعان: كثيرات الحدود وهي التي نستخدم فيها الجمع والطرح والضرب فقط، والدوال الكسرية وهي التي نستخدم فيها العمليات السابقة والقسمة أيضا.

ومن الدوال الجبرية: الدالة الثابتة والدالة الخطية والدالة التربيعية والدالة الكسرية.

1) **الدالة الثابتة:** وهي من الشكل: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $y=f(x)=a$ و a عدد حقيقي ثابت.

ومن خواصها:

1) $D_f=\mathbb{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

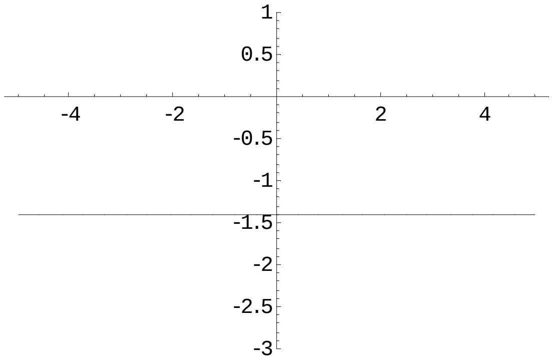
2) $R_f=\{a\}$ أي أنها تقبل قيمة واحدة فقط.

3) $f(-x)=f(x)$ أي أنها زوجية.

4) يمكن تمثيلها بخط مستقيم يوازي محور السينات.

مثال 15 : مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}$.

الحل:



2)**الدالة الخطية :** وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=a\,x+b$ و a,b عددان حقيقيان ثابتان و $a\neq 0$ أي أنها كثير حدود من الدرجة الأولى.

ومن خواصها :

1) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

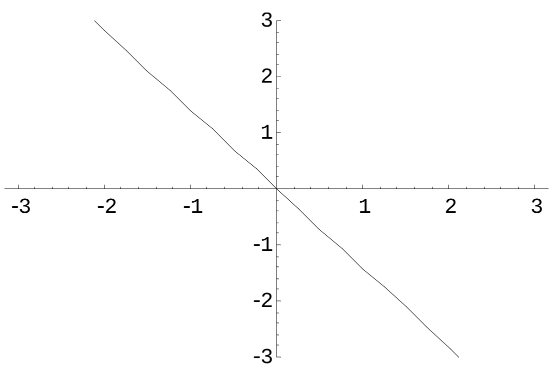
2) $R_f=\mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية..

3) ليست فردية ولا زوجية.

4) يمكن تمثيلها بخط مستقيم مائل يمر من نقطة المبدأ إذا كانت $b=0$ و بخط مستقيم مائل يمر من النقطة $(0,b)$ إذا كانت $b\neq 0$.

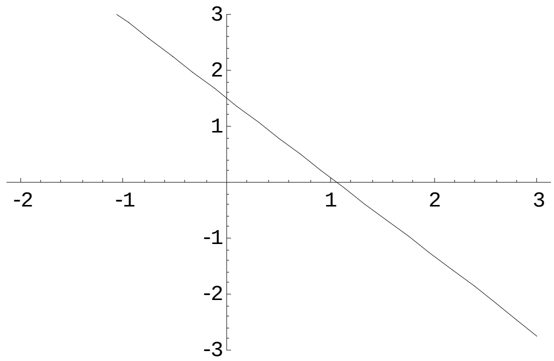
مثال 16 : مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x$.

الحل:



مثال 17 **:** مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x+1.5$.

الحل:



4) **الدالة التربيعية:** وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=a\,x^2+b\,x+c$ و $a\neq 0$ و b و c أعداد حقيقية ثابتة أي أنها كثير حدود من الدرجة الثانية.

ومن خواصها:

1) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

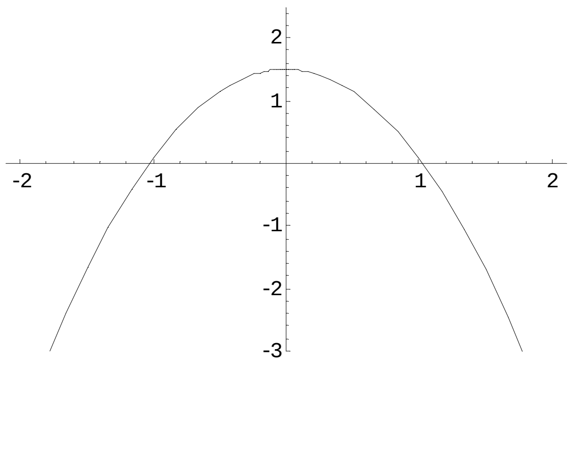
2) $R_f\neq\mathrm{R}$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية..

3) ليست فردية ولا زوجية ولكنها زوجية إذا كان $b=0$.

4) يمكن تمثيلها بقطع مخروطي زائد يمر من نقطة المبدأ إذا كان $b=c=0$.

مثال 18 **:** مثّل الدالة التالية: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $f(x)=-\sqrt{2}\,x^2+1.5$.

الحل:



4) **الدالة الكسرية :** وهي عبارة عن كسر بسطه ومقامه كثيرات حدود.

وسنأخذ كمثال لها الدالة: $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

ومن خواصها :

1) $D_f = \mathrm{R} - \{1\}$ أي أنها ليست معرفة لكل عدد حقيقي.

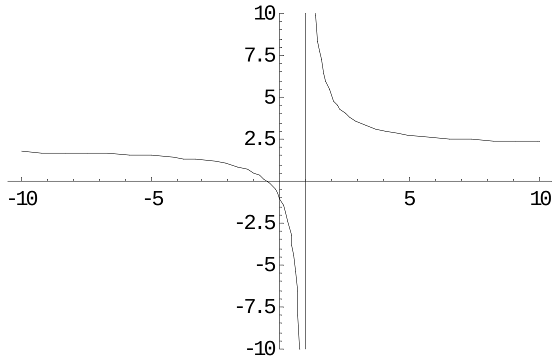
2) $R_f = \mathrm{R} - \{2\}$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية..

3) ليست فردية ولا زوجية.

4) يمكن تمثيلها بقطع مخروطي مكافئ لا يمر من نقطة المبدأ.

مثــال 19 **:** مثّـل الدالــة التاليــة: $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيــث $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

الحل:



2.4 الدوال غير الجبرية :

أما الدوال غير الجبرية فمنها : الدوال المثلثية والدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.

1.2.4 الدوال المثلثية

تعريـف 6 **:** الـدوال المثلثيـة هـي الـدوال الـتي تكـون معرّفـة علـى الزوايـا. ونقـيس الزوايـا بوحـدة الراديـان (الوحدة القياسية) أو بالدرجات (التي رمزها °) وعلاقة التحويل بين هاتين الوحدتين هي: $\pi = 180°$

ومن الدوال المثلثية : دالة الجيب ودالة جيب التمام ودالة الظل ودالة قاطع التمام ودالة القاطع.

تعريف 7 **:** نقول عن دالـة $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ إنهـا دوريـة ذات دور $p > 0$ إذا كـان: $f(x+p) = f(x)$ مـن أجل أي عدد حقيقي $x \in D_f$ (و p أصغر ما يمكن)، أي أن قيم الدالة تتكرر بشكل منتظم.

تعريف 7 **:** إذا كان لدينا مثلث قائم الزاوية وكان x مقياس أحد زاويتيه غير القائمتين فإن:

$\sin x$ هو حاصل قسمة طول الضلع المقابل للزاوية غير الوتر على طول الوتر،

و $\cos x$ هو حاصل قسمة طول الضلع المجاور للزاوية غير الوتر على طول الوتر.

و $\tan x$ هو حاصل قسمة طول الضلع المقابل للزاوية على طول الضلع المجاور للزاوية غير الوتر

و $\cot x$ هو حاصل قسمة طول الضلع المجاور للزاوية غير الوتر على طول الضلع المقابل للزاوية

1) **دالة الجيب:** ويرمز لها بالرمز: sin وهي من الشكل: $\sin : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \sin x$. معممة لمقياس أية زاوية.

ومن خواصها:

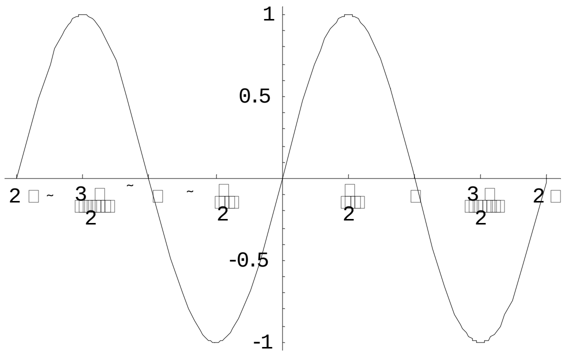
1) $D_f = \mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

2) $R_f = [-1,1]$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $-1 \le \sin x \le 1$

3) $\sin(-x) = -\sin x$ أي أنها فردية.

4) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ أي أنها دورية ذات دور 2π .

5) يمكن تمثيلها بموجة تمر من نقطة المبدأ كما هو موضح بالرسم التالي:



2) **دالة جيب التمام:** ويرمز لها بالرمز: cos وهي من الشكل: $\cos : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \cos x$. معممة لمقياس أية زاوية..

ومن خواصها:

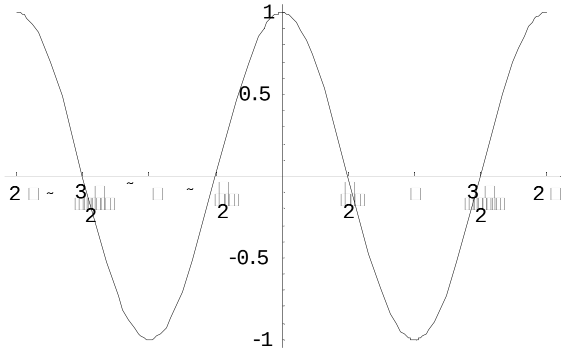
1) $D_f = \mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

2) $R_f = [-1,1]$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $-1 \le \cos x \le 1$.

3) $\cos(-x) = \cos x$ أي أنها زوجية.

4) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ أي أنها دورية ذات دور 2π .

5) يمكن تمثيلها بموجة لا تمر من نقطة المبدأ كما هو موضح بالرسم التالي.



3) **دالة الظل:** ويرمز لها بالرمز: $\tan$ وهي من الشكل: $\tan : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ . .

ومن خواصها:

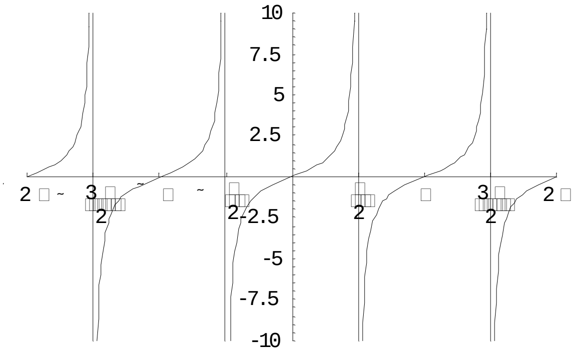
1) $D_f = \mathrm{R} - \{\cdots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \cdots\}$ أي أنها ليست معرفة لكل عدد حقيقي.

2) $R_f = \mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية.

3) $\tan(-x) = -\tan x$ أي أنها فردية.

4) $\tan(x + \pi) = \tan x$ أي أنها دورية ذات دور π .

5) يمكن تمثيلها ب"موجة" تمر من نقطة المبدأ كما هو موضح بالرسم التالي.



4) **دالة ظل التمام:** ويرمز لها بالرمز: $\cot$ وهي من الشكل: $\cot : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

ومن خواصها:

1) $D_f = \mathrm{R} - \{\cdots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots\}$ أي أنها ليست معرفة لكل عدد حقيقي.

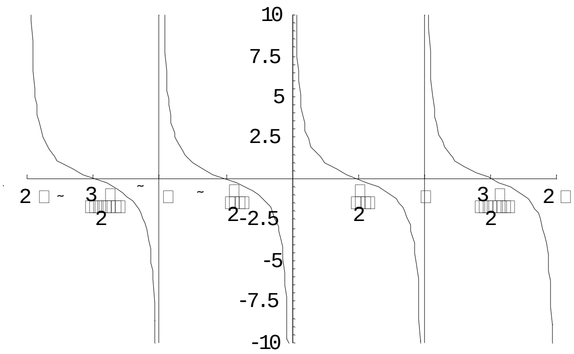
2) $R_f = \mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية.

3) $\cot(-x) = -\cot x$ أي أنها فردية.

4) $\tan(x + \pi) = \tan x$ أي أنها دورية ذات دور π .

5) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$.

6) يمكن تمثيلها ب"موجة" تمر من نقطة المبدأ كما هو موضح بالرسم التالي.



2.2.4 الدوال الأسية: وهي من الشكل: $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=f(x)=b^x$ و $b\neq 1$ عدد حقيقي موجب ثابت.

ومن خواصها:

1) $D_f=\mathrm{R}$ أي أنها معرفة لكل عدد حقيقي.

2) $R_f=[0,\infty)$ أي أنها لا تقبل كل القيم الحقيقية ولكن: $b^x>0$.

3) ليست فردية ولا زوجية.

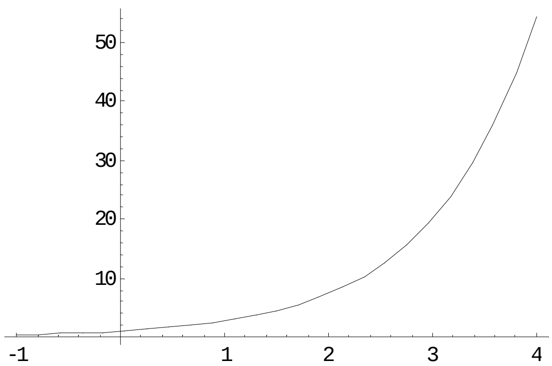
4) ومن حالاتها الخاصة كثيرة الاستعمال: دالة الأساس الطبيعي $y=e^x$ حيث $e\cong 2.71828$.وهي متزايدة بسرعة أي أن قيمها تكبر بسرعة، وتقترب من الصفر كلما كانت قيم x سالبة.

5) قانون تغيير الأساس للدوال الأسية: $b^x=e^{x\ln b}$.

6) يمكن تمثيلها بتحديد قيمة للعدد b.

مثال 20: مثل الدالة التالية: $y=e^x$.

الحل:



3.2.4 الدوال اللوغاريتمية: ويرمز لها بالرمز: $\log_b$ وهي من الشكل: $\log_b:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ حيث $y=\log_b x$ إذا كان $x=b^y$ و $b\neq 1$ عدد حقيقي موجب ثابت..

ومن خواصها:

1) $\log_b(b^x)=x$ و $b^{\log_b x}=x$ أي أنها تسمح لنا بالتخلص من الدالة الأسية الموافقة لها والعكس.

2) $D_f=(0,\infty)$ أي أنها ليست معرفة إلا للأعداد الموجبة.

3) $R_f=\mathrm{R}$ أي أنها تقبل كل القيم الحقيقية.

4) ليست فردية ولا زوجية.

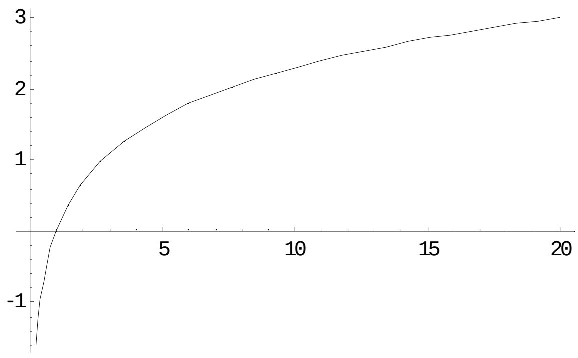
5) ومن حالاتها الخاصة كثيرة الاستعمال: دالة اللوغاريتم الطبيعي $y=\ln x=\log_e x$ حيث $e\cong 2.71828$.وهي متزايدة ببطء أي أن قيمها تكبر ببطء ولذلك تستخدم لتمثيل الأعداد الكبيرة. وكذلك تتجه قيمها إلى الأعداد السالبة الصغيرة جدا كلما صغرت قيم x .

6) قانون تغيير الأساس للدوال اللوغاريتمية: $\log_b x = \dfrac{\ln x}{\ln b}$.

7) يمكن تمثيلها بتحديد قيمة للعدد b.

مثال 21**:** مثل الدالة التالية: $y = \ln x$.

الحل:



تمارين

تمرين 1**:** بين أن كلا من العلاقات التالية دوال:

$$1)\ f: \mathrm{N} \to \mathrm{N},\ f(x) = x^3, \qquad 2)\ f: \mathrm{N} \to \mathrm{N},\ f(x) = \sqrt[3]{x},$$
$$3)\ f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = x^3 + 1, \qquad 4)\ f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$$

تمرين 2**:** حدد مجال كل دالة من التمرين 1 ومداها:

تمرين 4**:** هل كل مما يلي دالة فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

$$1)\ f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = \sin 2x \qquad 2)\ f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$$
$$3)\ f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = e^{|x|} \qquad 4)\ f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = |x|.$$

تمرين 5**:** مثل كلا من الدوال التالية:

$$1)\ f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = \sin 2x \qquad 2)\ f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$$
$$3)\ f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = e^{|x|} \qquad 4)\ f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = |x|$$

تمرين 6**:** بين أن الدوال التالية دورية وحدد دورها:

$$1)\ \sin 2x, \qquad 2)\ \cos\frac{1}{4}x, \qquad 3)\ \sin 2x - \cos\frac{1}{4}x, \qquad 4)\ \tan x + 2\cos 3x.$$

تمرين 7**:** ما هو وجه الشبه بين دالتي الجيب وجيب التمام ووجه الفرق بينهما؟

تمرين 8**:** ما هو وجه الشبه بين دالتي الظل وظل التمام ووجه الفرق بينهما؟

رياضيات تخصصية

الدوال الأسية واللوغاريتية

اسم الوحدة: الدوال الأسية و اللوغارثمية

الجدارة: معرفة الدوال الأسية واللوغاريتمية والقدرة على حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية..

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على:

- حساب قيم الأسس واجراء العمليات عليها.
- حساب اللوغاريتمية.
- حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية.

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة 80٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: ثماني ساعات.

الدوال الأسية واللوغاريتمية

يبدو أن محمد الخوارزمي هو أول من استخدم اللوغاريتمات ووضع لها جداول في بداية القرن الثالث الهجري (بداية القرن التاسع الميلادي)، رغم أن البعض يعتبرون الأسكتلندي *John Napier* هو الأول وذلك في سنة 1614م. وقد يعود أصل كلمة لوغاريتم إلى تغيير وقع في ترجمة اسم الخوارزمي إلى اللاتينية.

وتستخدم الدوال الأسية واللوغاريتمية في كثير من القوانين التجريبية، كما تستخدم اللوغاريتمات خاصة لتمثيل كميات كبيرة جدا.

1. الأسس:

تعريف 1: ليكن لدينا عدد حقيقي x وعدد طبيعي n فيكون x أس n هو:

$$x^n = x \times x \times \cdots \times x \quad n \text{ مرة}$$

بينما: $x^0 = 1$

- الرمز x^n يسمى القوة n للعدد x ويقرأ x أس n أو x مرفوع للقوة n
- في الرمز x^n. العدد x يسمى الأساس و العدد n يسمى الأس.

مثال 1: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ 3^2 \qquad 2)\ (-2)^4 \qquad 3)\ (-3)^3$$

الحل:

$$1)\ 3^2 = 3 \times 3 = 9$$
$$2)\ (-2)^4 = -2 \times -2 \times -2 \times -2 = 16$$
$$3)\ (-3)^3 = -3 \times -3 \times -3 = -27$$

تعريف 2: ليكن لدينا عدد حقيقي $x \neq 0$ وعدد طبيعي n فيكون x أس $-n$ هو:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

مثال 2: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ 3^{-2}, \qquad 2)\ (-2)^{-4}, \qquad 3)\ (-3)^{-3}$$

الحل:

$$1)\ 3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$
$$2)\ (-2)^{-4}=\frac{1}{(-2)^4}=\frac{1}{16}$$
$$3)\ (-3)^{-3}=\frac{1}{(-3)^3}=\frac{1}{-27}=-\frac{1}{27}$$

1.1 قوانين الأسس

إذا كان كل من x و y عددا حقيقيا لا يساوي الصفر وكان كل من n و m عددا صحيحا فإن:

$$1)\ \left(x^n\right)^m=x^{nm}$$
$$2)\ (xy)^n=x^n y^n$$
$$3)\ x^n x^m=x^{n+m}$$
$$4)\ \frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$$

مثال 3: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ (xy)^{-2},\qquad 2)\ \left((-2)^{-4}\right)^2,\qquad 3)\ \frac{(-3)^{-3}}{(-3)^{-4}},\qquad 4)\ 5^2 5^3$$

الحل:

$$1)\ (xy)^{-2}=\frac{1}{(xy)^2}=\frac{1}{x^2y^2},\qquad 2)\ \left((-2)^{-4}\right)^2=(-2)^{-8}=\frac{1}{(-2)^8}=\frac{1}{32}$$
$$3)\ \frac{(-3)^{-3}}{(-3)^{-4}}=(-3)^{-3-(-4)}=(-3)^{-3+4}=(-3)^1=-3,$$
$$4)\ 5^2 5^3=5^{2+3}=5^5=3125$$

2.1. اختصار المقادير الأسية:

يتم اختصار المقادير الأسية على أساس القوانين السابقة

مثال 4: بسط ما يلي إلى أبسط صورة مستخدما قوانين الأسس:

$$1)\ \frac{8^{-3}\times(18)^2}{81\times(16)^{-2}},\qquad 2)\ \frac{x^3y^5z^{-4}}{y^3x^{-2}z^2},\qquad 3)\ \frac{4^{n+1}\times 6^{1-2n}}{9^{1-n}}$$

الحل:

$$1)\ \frac{8^{-3}\times(18)^2}{81\times(16)^{-2}}=\frac{(2^3)^{-3}\times(2\times3^2)^2}{3^4\times(2^4)^{-2}}=\frac{2^{-9}\times2^2\times3^4}{3^4\times2^{-8}}$$

$$=\frac{2^{-7}\times3^4}{3^4\times2^{-8}}=2^{-7+8}\times3^{4-4}=2\times3^0=2\times1=2$$

$$2)\ \frac{x^3y^5z^{-4}}{y^3x^{-2}z^2}=x^{3+2}y^{5-3}z^{-4-2}=x^5y^2z^{-6}=\frac{x^5y^2}{z^6}$$

$$3)\ \frac{4^{n+1}\times6^{1-2n}}{9^{1-n}}=\frac{(2^2)^{n+1}\times(2\times3)^{1-2n}}{(3^2)^{1-n}}=\frac{2^{2n+2}\times2^{1-2n}\times3^{1-2n}}{3^{2-2n}}$$

$$=\frac{2^3\times3^{1-2n}}{3^{2-2n}}=2^3\times3^{1-2n-2+2n}=2^3\times3^{-1}=\frac{2^3}{3^1}=\frac{8}{3}$$

2. الجذور

تعريف 3: ليكن لدينا عدد حقيقي x و y وعدد طبيعي n يخالف 1 فإن كل عدد حقيقي y يحقق المعادلة : $y=x^n$ يسمى جذرا نونيا للعدد x أو الجذر النوني للعدد x

أي أن الجذر هو العملية العكسية للرفع إلى أس عدد طبيعي.

ونرمز للجذر النوني للعدد x بالرمز $\sqrt[n]{x}$ أو $x^{\frac{1}{n}}$

يسمى الجذر من الدرجة 2 بالجذر التربيعي ويرمز له بالرمز $\sqrt{\ }$ ، بينما يسمى الجذر من الدرجة 3 بالجذر التكعيبي. $\sqrt[3]{\ }$

تجدر الإشارة إلى أنه لا يمكن حساب جذر من درجة زوجية للأعداد السالبة باستخدام الأعداد الحقيقية.

مثال 5: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ 8^{\frac{1}{3}},\qquad 2)\ (-27)^{\frac{1}{3}},\qquad 3)\ 16^{\frac{1}{4}}$$

الحل:

$$1)\ 8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$$

$$2)\ (-27)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-27}=-3$$

$$3)\ 16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2$$

1.2 قوانين الجذور:

إذا كان x, y أعداد حقيقية و m, n أعداد طبيعية فيكون لدينا ما يلي:

$$1)\ \sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

$$2)\ \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

$$3)\ x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

$$4)\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$$

$$5)\ \sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x & \text{فردي } n \\ |x| & \text{زوجي } n \end{cases}$$

مثال 6: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ (-27)^{\frac{2}{3}}, \qquad 2)\ 16^{-\frac{5}{4}}, \qquad 3)\ 25^{\frac{3}{2}}$$

الحل:

$$1)\ (-27)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)^2 = (-3)^2 = 9$$

$$2)\ 16^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$3)\ 25^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125$$

مثال 7: بسط العبارات التالية:

$$1)\ \sqrt[4]{2xy}\ \ \sqrt[4]{4xy^2}\ \ \sqrt[4]{2x^2y}, \qquad 2)\ \sqrt[6]{\frac{x^6y^5}{x^2}}\ \ \sqrt[6]{\frac{x^3y^5}{xy^4}}, \qquad 3)\ \frac{\sqrt[3]{x^5y^7}}{\sqrt[3]{x^2y}}$$

الحل:

$$1)\ \sqrt[4]{2xy}\ \ \sqrt[4]{4xy^2}\ \ \sqrt[4]{2x^2y} = \sqrt[4]{16x^4y^4}$$
$$= \sqrt[4]{2^4}\ \ \sqrt[4]{x^4}\ \ \sqrt[4]{y^4} = |2|\,|x|\,|y| = 2|x|\,|y|$$

$$2)\ \sqrt[6]{\frac{x^6y^5}{x^2}}\ \ \sqrt[6]{\frac{x^3y^5}{xy^4}} = \sqrt[6]{\frac{x^9y^{10}}{x^3y^4}} = \sqrt[6]{x^6}\ \ \sqrt[6]{y^6} = |x|\,|y|$$

$$3)\ \frac{\sqrt[3]{x^5y^7}}{\sqrt[3]{x^2y}} = \sqrt[3]{\frac{x^5y^7}{x^2y}} = \sqrt[3]{x^3}\ \ \sqrt[3]{y^6} = x\ y^2$$

مثال 8: بسّط كلا مما يلي:

$$1)\ \frac{10x^3y^2}{5xy^4}\qquad 2)\ \left(\frac{3x}{2y}\right)^2\left(\frac{5x^3}{y^4}\right)\left(\frac{4y^3}{15x^4}\right)\qquad 3)\ \frac{x^6y^{-2}z^{-1}}{x^5y^{-3}z^2}\qquad 4)\ \left(\frac{\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt[4]{-x^2y}}\right)^6$$

الحل:

$$1)\ \frac{10x^3y^2}{5xy^4}=\frac{10}{5}\frac{x^3}{x}\frac{y^2}{y^4}=2x^{3-1}y^{2-4}=2x^2y^{-2}=\frac{2x^2}{y^2}$$

$$2)\ \left(\frac{3x}{2y}\right)^2\left(\frac{5x^3}{y^4}\right)\left(\frac{4y^3}{15x^4}\right)=\frac{3^2x^2}{2^2y^2}\frac{5x^3}{y^4}\frac{2^2y^3}{3\times5x^4}=\frac{3^2\times5\times2^2x^5y^3}{2^2\times3\times5x^4y^6}=3xy^{-3}=\frac{3x}{y^3}$$

$$3)\ \frac{x^6y^{-2}z^{-1}}{x^5y^{-3}z^2}=x^{6-5}y^{-2-(-3)}z^{-1-2}=xyz^{-3}=\frac{xy}{z^3}$$

$$4)\ \left(\frac{\sqrt[3]{xy^3}}{\sqrt[4]{-x^2y}}\right)^6=\left(\frac{(xy^3)^{\frac{1}{3}}}{(-x^2y)^{\frac{1}{4}}}\right)^6=\frac{(xy^3)^{\frac{6}{3}}}{(-x^2y)^{\frac{6}{4}}}=\frac{(xy^3)^2}{(-x^2y)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x^2y^6}{x^{\frac{6}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x^2(-y)^6}{x^{\frac{6}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=x^{2-3}(-y)^{6-\frac{3}{2}}=x^{-1}(-y)^{\frac{9}{2}}=\frac{\left(\sqrt{-y}\right)^9}{x}$$

تجدر الإشارة إلى أننا وضعنا $-y$ تحت الجذر لأنه موجب وهذا يستنتج من $\sqrt[4]{-x^2y}$ فلابد أن يكون ما تحت جذر من درجة زوجية موجبا لكن x^2 موجب إذن $-y$ موجب أيضا.

3. الدوال الأسية:

تعريف 4: ليكن لدينا عدد حقيقي موجب $b\neq1$ ومتغير حقيقي x فإن الدالة الأسية ذات الأساس b هي على الشكل التالي: $y=f(x)=b^x$

مثال 9: حدد أساس كل من الدوال الأسية التالية:

$$1)\ y=f(x)=2^{-x},\qquad 2)\ y=f(x)=\pi^x,\qquad 3)\ y=f(x)=2^{\frac{x}{2}}$$

الحل:

1) الأساس هو $\frac{1}{2}$ لأن: $y=f(x)=2^{-x}=\frac{1}{2^x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

2) الأساس هو π .

3) الأساس هو $\sqrt{2}$ لأن: $y=f(x)=2^{\frac{x}{2}}=\left(\sqrt{2}\right)^x$

نظرية 1 : ليكن لدينا المتغيران الحقيقيان x و y والعدد الحقيقي الموجب $b \neq 1$ فإن:

$$1)\ b^x > 0,\quad 2)\ b^x b^y = b^{x+y},\quad 3)\ \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y},\quad 4)\ \left(b^x\right)^y = b^{xy}$$

مثال 10 : بسّط كلا مما يلي:

$$1)\ \left(2^x 2^3\right)^{\frac{1}{4}},\qquad 2)\ \frac{5^{-x+2}25^x}{125^{3+x}},\qquad 3)\ \left(\sqrt[x]{9}\,3^2\right)^x$$

الحل:

$$1)\ \left(2^x 2^3\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{x}{4}} 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8}\left(\sqrt[4]{2}\right)^x$$

$$2)\ \frac{5^{-x+2}25^x}{125^{3+x}} = \frac{5^{-x+2}\left(5^2\right)^x}{\left(5^3\right)^{3+x}} = \frac{5^{-x+2}5^{2x}}{5^{9+3x}} = \frac{5^{x+2}}{5^{9+3x}} = 5^{-2x-7} = \frac{1}{5^{2x+7}} = \frac{1}{5^7 5^{2x}}$$

$$= \frac{1}{5^7}\frac{1}{5^{2x}} = \frac{1}{5^7}\left(\frac{1}{5^2}\right)^x = \frac{1}{78125}\left(\frac{1}{25}\right)^x$$

$$3)\ \left(\sqrt[x]{9}\,3^2\right)^x = \left((9)^{\frac{1}{x}}\,9\right)^x = 9\left(9^x\right)$$

1.3. المعادلات الأسية :

قاعدة 1 : ليكن لدينا عددان حقيقيان x و y وعدد حقيقي موجب a حيث $a \neq 1$ فإن:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

إدا تساوت الأساسات تتساوى الأسس

قاعدة 2 : إذا كان a,b عددين حقيقيين موجبين، x عدد حقيقي فإن:

$$a^x = b^x \Leftrightarrow a = b$$

إدا تساوت الأسس تتساوى الأساسات

مثال 11 : حل المعادلات التالية:

$$1)\ 3^{x-2} = 3^5,\quad 2)\ x^3 - 1 = 7,\quad 3)\ \left(\frac{9}{4}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{6-x},\qquad 4)\ 5^{x(x-6)} = \left(\frac{1}{25}\right)^4$$

الحل:

$$1)\ 3^{x-2} = 3^5 \Leftrightarrow x - 2 = 5$$

$$\therefore\ x = 7$$

$$2)\ x^3 - 1 = 7 \Leftrightarrow x^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 2^3 \quad \therefore\ x = 2$$

$$3)\left(\frac{9}{4}\right)^{2x}=(\frac{2}{3})^{6-x}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{4x}=(\frac{3}{2})^{-6+x}$$

$$\Leftrightarrow 4x=-6+x\Leftrightarrow 3x=-6\Leftrightarrow\ x=-2$$

$$4)5^{x(x-6)}=(\frac{1}{25})^{4}\Leftrightarrow 5^{x^2-6x}=(25)^{-4}$$

$$\Leftrightarrow 5^{x^2-6x}=5^{-8}\Leftrightarrow x^2-6x=-8$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+8=0\ \Leftrightarrow (x-4)(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\text{إما}\quad x-4=0 & \Rightarrow x=4\\ \text{أو}\quad x-2=0 & \Rightarrow x=2\end{cases}$$

إذن مجموعة الحل هي : $\{2,4\}$

4. الدوال اللوغاريتمية :

ذكر العالم الرياضي نبير(Napier) في سنة 1614 م في كتابه الذي شرح فيه اللوغاريثمات ما يلي : "وقد رأيت أن لاشيء أكثر انزعاجا في العمليات الرياضية ويضجر ويؤخر المحاسبين من عمليات الضرب والقسمة وإيجاد الجذور التربيعية والتكعيبية للأعداد الكبيرة، وبالإضافة إلى أنها تضيع وقت طويل مملا فهي معرضة لكثير من الأخطاء ولذلك ابتدأت في التفكير بطريقة لإزالة هذه العوائق

لحل المعادلة : $16=2^y$ نحلل العدد في الطرف الأيسر بحيث نكتبه على شكل عدد أسي ذا الأساس 2: وبما أن $16=2^4$ فيكون لدينا :

$$2^4=2^y\Rightarrow y=4$$

بالمثل

$$100=10^y\Rightarrow 10^2=10^y\Rightarrow y=2$$

في حالة صعوبة تحليل العدد في الطرف الأيسر مثل $2=10^y$ فبالتالي من الصعوبة إيجاد قيمة y بالطريقة السابقة لذالك نلجأ لتعيين قيمة y باستخدام دالة جديدة تسمى الدالة اللوغاريتمية .

تعريف 5 : ليكن لدينا عدد حقيقي موجب $b\neq 1$ ومتغير حقيقي موجب x فإن الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس b هي على الشكل التالي: $y=\log_b x$ بحيث: $x=b^y$.

أي أن الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية ($\log_b b^x=x$ و $b^{\log_b x}=x$)

والرمز $\log_a x$ يقرأ لوغاريتم x للأساس a

مثال 12 :

1) بما أن $8 = 2^3$ إذن $\log_2 8 = 3$

2) بما أن $32 = 2^5$ إذن $\log_2 32 = 5$

3) بما أن $10000 = 10^4$ إذن $\log_{10} 10000 = 4$

4) بما أن $0.01 = 10^{-2}$ إذن $\log_{10} 0.01 = -2$

1.4 قوانين اللوغاريتمات:

إذا كان كل من x, y, a أعداد حقيقية موجبة، و $a \neq 1$ وكان n عدد حقيقي فإن:

$$1)\log_a 1 = 0$$
$$2)\log_a (x \times y) = \log_a x + \log_a y$$
$$3)\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$
$$4)\log_a x^n = n\log_a x$$
$$5)\log_a a = 1$$

مثال 13 : أوجد قيمة كل لوغاريتم فيما يلي:

$$1)\log_7 7\ , \quad 2)\log_5\left(\frac{1}{125}\right), \quad 3)\log_4 16$$
$$4)\log_3 21 - \log_3 7\ , \quad 5)\log_4 8$$

الحل:

$$1)\log_7 7 = 1$$
$$2)\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = \log_5 1 - \log_5 125 = 0 - \log_5 5^3 = -3\log_5 5 = -3 \times 1 = 3$$
$$3)\log_4 16 = \log_4 4^2 = 2\log_4 4 = 2 \times 1 = 2$$
$$4)\log_3 21 - \log_3 7 = \log_3 \frac{21}{7} = \log_3 3 = 1$$
$$5)\log_4 8 = \log_4 2^3 = \log_4(\sqrt{4})^3 = \log_4(4^{\frac{1}{2}})^3 = \log_4 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log_4 4 = \frac{3}{2}$$

مثال 14 : اكتب كلا مما يلي باستخدام لوغاريتم واحد :

$$1)\ \log_3(x+3) + 2\log_3 10 - \log_3 x, \qquad 2) - \log_2 6 + \log_2(3x-2) + \log_2(3-2x)$$

الحل:

$$1)\ \log_3(x+3)+2\log_3 10-\log_3 x=\log_3(x+3)+\log_3 10^2-\log_3 x=\log_3\left(\frac{(x+3)\times 10^2}{x}\right)$$

$$=\log_3\left(\frac{100(x+3)}{x}\right)$$

$$2)\ -\log_2 6+\log_2(3x-2)+\log_2(3-2x)=\log_2\left(\frac{(3x-2)(3-2x)}{6}\right)$$

حالات خاصة:

تعريف 6**:** اللوغاريتم العشري هو اللوغاريتم ذو الأساس 10.

يرمز له بالرمز: $\log x$

مثال 15**:** احسب كلا مما يلي:

$$1)\ \log 100+\log 0.001-\log 1000,\qquad 2)\ -\log 0.1-\log 0.01+\log 1000$$

الحل:

$$1)\ \log 100+\log 0.001-\log 1000=\log 10^2+\log 10^{-3}-\log 10^3=2-3-3=-4$$

$$2)\ -\log 0.1-\log 0.01+\log 1000=-\log 10^{-1}-\log 10^{-2}+\log 10^3=-(-1)-(-2)+3=6$$

تعريف 7**:** اللوغاريتم الطبيعي (أو النيبيري) هو اللوغاريتم ذو الأساس e حيث:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cong 2.71828$$

يرمز له بالرمز: $\ln x$

و كانت هناك جداول لحساب اللوغاريتمات الطبيعية ولكن يمكن استخدام الآلة الحاسبة أيضا.

مثال 16**:** باستخدام الآلة الحاسبة، قرّب كلا مما يلي:

$$1)\ \ln 10,\qquad 2)\ \ln 3.15,\qquad 3)\ \ln\sqrt{2}$$

الحل:

$$1)\ \ln 10\cong 2.3026$$
$$2)\ \ln 3.15\cong 1.1474$$
$$3)\ \ln\sqrt{2}\cong 0.3466$$

نظرية 2 : ليكن لدينا عدد حقيقي موجب $b \neq 1$ ومتغير حقيقي موجب x فإن:

$$1)\ b^{x} = e^{x \ln b}$$

$$2)\ \log_{b} x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

ومن فوائد هذه النظرية أنها تسمح لنا بالانتقال من أي أساس إلى الأساس الطبيعي سواء بالنسبة للدوال الأسية أو الدوال اللوغاريتمية.

مثال 17 : احسب كلا مما يلي:

$$1)\ \log_2 10, \qquad 2)\ \log_5 \sqrt{2}, \qquad 3)\ \log_{\sqrt{2}} 5$$

الحل:

$$1)\ \log_2 10 = \frac{\ln 10}{\ln 2} \cong \frac{2.3026}{0.6931} = 3.322$$

$$2)\ \log_5 \sqrt{2} = \frac{\ln \sqrt{2}}{\ln 5} \cong \frac{0.3466}{1.6094} = 0.215$$

$$3)\ \log_{\sqrt{2}} 5 = \frac{\ln 5}{\ln \sqrt{2}} \cong \frac{1.6094}{0.3466} = 4.643$$

5. المعادلة اللوغاريتمية :

نظرية 3 : ليكن لدينا العددان الحقيقيان u و v فإن:

$$\ln u = \ln v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u > 0 \\ v > 0 \end{cases}$$

قاعدة 1 : من التعريف 7 لدينا :

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^{y}$$

صيغة أسية

قاعدة 2: ومن النظرية السابقة لينا :

إذا كان $b \neq 1,\ b > 0,\ y > 0\ , x > 0$ فإن:

$$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$$

ملاحظات:

- الأعداد التي لها لوغاريتم لأساس $a > 1$ هي الأعداد الحقيقية الموجبة.
- الأعداد الحقيقية السالبة ليس لها لوغاريتم

مثال 18**:** أوجد قيمة x إذا كانت:

$$1)\log_5 625 = x, \qquad 2)\log_x 8 = 3,$$
$$3)\log_6 3x = \log_6(2x+4), \quad 4)\ \log_4(x-1) - \log_4 10 = \log_4(2x+6) + \log_4 3.$$

الحل:

1) نطبق القاعدة (1):

$$1)\ \log_5 625 = x \Leftrightarrow 625 = 5^x$$
$$\Leftrightarrow 5^4 = 5^x \quad \therefore\ x = 4$$

2) نطبق القاعدة (1)

$$2)\ \log_x 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = x^3$$
$$\Leftrightarrow 2^3 = x^3$$
$$\therefore x = 2$$

3) نطبق القاعدة (2)

$$3)\ \log_6 3x = \log_6(2x+4) \Rightarrow 3x = 2x + 4$$
$$\therefore x = 4$$

$$4)\log_4(x-1) - \log_4 10 = \log_4(2x+6) + \log_4 3,$$
$$\Rightarrow \log_4\left(\frac{x-1}{10}\right) = \log_4 3(2x+6)$$
$$\Rightarrow \log_4\left(\frac{x-1}{10}\right) = \log_4(6x+18)$$

نطبق القاعدة (2):

$$\therefore \frac{x-1}{10} = 6x + 18 \quad \Rightarrow x - 1 = 60x + 180$$
$$\Rightarrow 59x = -181 \Rightarrow x = \frac{-181}{59}$$

ولكن $x = \frac{-181}{59}$ مرفوض لأنه لا يحقق المعادلة الأصلية

$\therefore$ مجموعة الحل هي ϕ

4. المعادلات الأسية واللوغاريتمية:

في هذه الفقرة سنتطرق إلى حل المعادلات التي تحتوي على الأسس أ و اللوغاريتمات بالانتقال من المعادلات الأسية إلى المعادلات اللوغاريتمية أو العكس حسب ما يقتضيه تسهيل المسألة.

مثال 19 : حل المعادلات التالية:

$$1)\ 5^{3x-2}=4,\qquad 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}=9^{2x-3},\qquad 3)\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x-1}=\frac{25}{16}$$

الحل:

$$1)\ 5^{3x-2}=4 \Leftrightarrow \ln 5^{3x-2}=\ln 4 \Leftrightarrow (3x-2)\ln 5=\ln 4 \Leftrightarrow 3x-2=\frac{\ln 4}{\ln 5}$$

$$\Leftrightarrow 3x=\frac{\ln 4}{\ln 5}+2 \Leftrightarrow x=\frac{\frac{\ln 4}{\ln 5}+2}{3}\cong 0.954$$

$$2)\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}=9^{2x-3} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}=\ln 9^{2x-3} \Leftrightarrow (3x+1)\ln\frac{1}{2}=(2x-3)\ln 9$$

$$\Leftrightarrow 3x\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{2}=2x\ln 9-3\ln 9 \Leftrightarrow 3x\ln\frac{1}{2}-2x\ln 9=-3\ln 9-\ln\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x(3\ln\frac{1}{2}-2\ln 9)=-3\ln 9-\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x(-3\ln 2-2\ln 9)=-3\ln 9+\ln 2$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{-3\ln 9+\ln 2}{3\ln 2+2\ln 9}\cong 0.911$$

$$3)\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x-1}=\frac{25}{16} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2+2x-1}=\ln\frac{25}{16} \Leftrightarrow (x^2+2x-1)\ln\frac{4}{5}=\ln\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-1=\frac{\ln\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}}{\ln\frac{4}{5}} \Leftrightarrow x^2+2x-1=\frac{-2\ln\frac{4}{5}}{\ln\frac{4}{5}} \Leftrightarrow x^2+2x-1=-2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-1+2=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

مثال 20: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \ln x=2,\qquad 2)\ \ln(3x-5)=5,\qquad 3)\ \ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln 2$$

الحل:

$$1)\ \ln x=2 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=e^2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=e^2\cong 7.389$$

$$2)\ \ln(3x-5)=5 \Leftrightarrow \ln(3x-5)=\ln e^5 \Leftrightarrow \begin{cases}3x-5=e^5\\ 3x-5>0\end{cases} \Leftrightarrow 3x=e^5+5 \Leftrightarrow x=\frac{e^5+5}{3}\cong 51.138$$

$$3)\ \ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases}\ln(x-2)(x+3)=\ln 2\\ x-2>0\\ x+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)(x+3)=2\\ x-2>0\\ x+3>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x-6=2\\ x-2>0\\ x+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x-6-2=0\\ x-2>0\\ x+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x-8=0\\ x-2>0\\ x+3>0\end{cases}$$

نحل المعادلة: $x^2+x-8=0$.

نحسب المميز: $\Delta=b^2-4ac=1^2-(4\times1\times-8)=33>0$

إذن للمعادلة جذران حقيقيان هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{33}}{2\times1}\cong -3.372$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{33}}{2\times1}\cong 2.372$$

نتحقق من شروط المعادلة (المتراجحتان):

بالنسبة للجذر الأول: $x_1-2=-5.372<0$ إذن الجذر مرفوض.

بالنسبة للجذر الثاني: $x_2-2=0.372>0$ و $x_2+3=5.372>0$ إذن الجذر مقبول.

خلاصة: الحل هو: $x=\frac{-1+\sqrt{33}}{2}\cong 2.372$

تمارين

تمرين1: اختر الإجابة الصحيحة في ما يلي:

1	ناتج القيمة 2^5 هو a) 2×5 b) $\frac{1}{32}$ c) -10 d) $2\times2\times2\times2\times2$
2	ناتج القيمة 3^{-3} هو a) -3×3 b) $\frac{1}{27}$ c) -27 d) $\sqrt[3]{-3}$
3	ناتج القيمة $(-9)^2$ هو a) 81 b) -9×2 c) -9×9 d) $\frac{1}{81}$
4	ناتج القيمة $\sqrt[4]{-16}$ هو a) 0 b) -2 c) 3 d) لايمكن حسابها
5	من الممكن كتابة الجذر $(\sqrt[3]{64})^{-2}$ على الشكل a) $(64)^{\frac{3}{-2}}$ b) $(64)^{-6}$ c) $\frac{1}{(\sqrt[3]{64})^2}$ d) $\frac{1}{64}$
3	ناتج القيمة $(-6)^2$ هو a) $\frac{1}{36}$ b) -6×2 c) -6×6 d) 36
4	ناتج القيمة $\sqrt[5]{-32}$ هو a) 0 b) -2 c) 3 d) لا يمكن حسابها
1	ناتج القيمة 4^2 هو a) 2×4 b) $2\times2\times2\times2$ c) 16 d) $\frac{1}{16}$
4	ناتج القيمة $\sqrt[3]{-8}$ هو a) 0 b) -2 c) 3 d) لايمكن حسابها

تمرين 2: بسط كلا مما يلي:

$$1)\ \frac{\sqrt[3]{x^2y^6}}{\sqrt[6]{x^2y^{18}}},\qquad 2)\ \frac{2x^{-5}}{15y^3}\times\frac{3^2x^3y}{10},\qquad 3)\ \left(\frac{-2x^6z}{x^{-2}y^3}\right)^3\left(\frac{y^6}{10x^2y^3z}\right)^2,$$

$$4)\ \frac{x^4y^3}{z^2}\times\left(\frac{z^5x^{-2}}{y^4}\right)^2,\qquad 5)\ \frac{\sqrt[4]{x^2z^3}}{\sqrt[3]{y^5x^3}}\times\frac{\sqrt{y^4z^{-5}}}{\sqrt[6]{x^8}}.$$

تمرين 3: بسط كلا مما يلي:

$$1)\ \frac{2^{x+1}}{2^{x-1}},\qquad 2)\ \frac{3^{1-2x}}{6^{x+2}}\times\frac{2^{x+3}}{8},\qquad 3)\ \left(e^{2x}\right)^3\left(1-2e^x\right)^2.$$

تمرين 4: بسط كلا مما يلي:

$$1)\ \log_2(x+1)-\log_2(x^2+2x+1),\qquad 2)\ \ln(x+3)-2\ln(1-x)+4\ln x$$

$$3)\ \log_5 e^{x+1}-\log_3 e^{2-x},\qquad 4)\ \log_9(x^2-1)-\log_3(x+1).$$

تمرين 5: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \sqrt[3]{x^2}=4,\qquad 2)\ x^{-5}=2x^3,\qquad 3)\ -2x^6=x^{-2}.$$

تمرين 6: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \sqrt[3]{x^2}=4,\qquad 2)\ x^{-5}=2x^3,\qquad 3)\ -2x^6=x^{-2}.$$

تمرين 7: حل المعادلات التالية:

$$1)\ 2^x=5^{x+1},\qquad 2)\ \sqrt[x]{3}=3^x,\qquad 3)\ \frac{2^{-x+2}}{6^x}=3^{x+1},\qquad 4)\ e^{x+3}=5.$$

تمرين 8: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \ln x+\ln(2-x)=0,\qquad 2)\ -\ln(x+3)+\ln(-x+2)=\ln 4,\qquad 3)\ \ln(x+6)=\ln(2x-1).$$

تمرين 9: حل المعادلات التالية:

$$1)\ \log_2 x+\log_2(2-x)=0,\qquad 2)\ -\log_3(x+5)+\log_3(-x+1)=\log_3 2,$$

$$3)\ \log(x-6)=\log(-2x+3),\qquad 4)\ \log x=3,\qquad 5)\ \log_2(x+3)+\log_5(x-2)=0.$$

رياضيات تخصصية

الأعداد المركبة

اسم الوحدة: الأعداد المركبة

الجدارة: معرفة الأعداد المركبة والقدرة على حل المعادلات باستخدام الأعداد المركبة.

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على:

- اجراء العمليات على الأعداد المركبة.
- تمثيل الأعداد المركبة بالشكل القطبي والشكل الأسي.
- ايجاد جذور عدد مركب.
- حل المعادلات الجبرية باستخدام الأعداد المركبة.

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرب إلى إتقان هذه الوحدة بنسبة 80٪ .

الوقت المتوقع للتدريب: اثنتا عشرة ساعة.

الأعداد المركبة

يعتبر السويسري *Leonhard Euler* هو أول من استخدم الأعداد المركبة في القرن الثامن عشر الميلادي. و من تطبيقاتها: حل المعادلات الجبرية و التحليل المتجهي والدوائر الكهربائية.

1. تعريف الأعداد المركبة:

هناك كثير من المعادلات الجبرية التي لا يمكن حلها باستخدام الأعداد الحقيقية. مثلا المعادلة التالية:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

فلحلّها نحتاج إلى توسيع مفهوم الجذر التربيعي إلى الأعداد السالبة مع الحفاظ على خصائصه،. فيمكن أن نكتب حينئذ:

$$x = \sqrt{-1} \quad \text{أو} \quad x = -\sqrt{-1}$$

لكن لا يمكن أن نحسب العدد $\sqrt{-1}$ فنضع مكانه رمزا خاصا.

تعريف 1**:** العدد التخيلي j هو أحد جذري المعادلة $x^2 + 1 = 0$ ، أي أن:

$$j = \sqrt{-1}$$

والجذر التربيعي هنا هو جذر موسع إلى الأعداد السالبة ويحافظ على خصائصه ما أمكن.

مثال 1**:** احسب ما يلي:

$$1)\ j^2, \qquad 2)\ j^3, \qquad 3)\ j^4.$$

الحل:

$$1)\ j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$2)\ j^3 = (\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1}) = (-1)\,j = -j$$

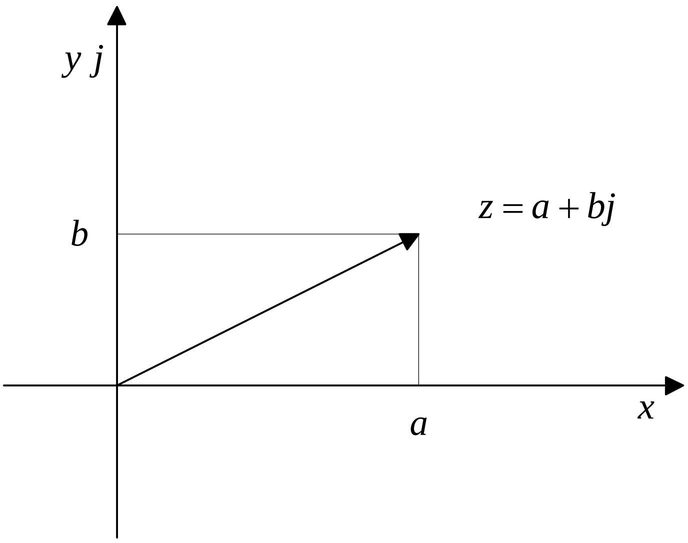
$$3)\ j^4 = (\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2 = (-1)(-1) = 1$$

تعريف 2**:** نقول عن z إنه عدد مركب إذا أمكن كتابته على الشكل التالي:

$$z = a + b\,j$$

حيث أن a و b عددان حقيقيان و $j = \sqrt{-1}$. يسمى هذا الشكل بالشكل الديكارتي ويرمز له كالتالي:

$$z = (a, b)$$



يسمى العدد a بالجزء الحقيقي للعدد المركب z ويسمى العدد b بالجزء التخيلي له. ونرمز لهما كما يلي:

$$a = \mathrm{Re}(z) \quad , \quad b = \mathrm{Im}(z)$$

كما .نرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز C

تجدر الإشارة إلى أن عددين مركبين يتساويان إذا تساوت كل من الأجزاء الحقيقية و التخيلية لهما.

يمكن تمثيل الأعداد المركبة بنقاط أو متجهات فيما يسمى بمستوى أرجاند كما هو موضح في الشكل التالي:

مثال 2**:** هل الأعداد التالية أعدادا مركبة؟

$$1) -3, \qquad 2)\ 0, \qquad 3)\ \sqrt{2}\ j, \qquad 4) -2+0.5\ j, \qquad 5)\ \sqrt{-16}.$$

الحل:

نعم كلها أعداد مركبة لأن:

$$1) -3 = -3 + 0\ j = (-3,0)$$
$$2)\ 0 = 0 + 0\ j = (0,0)$$
$$.3)\ \sqrt{2}\ j = 0 + \sqrt{2}\ j = (0,\sqrt{2})$$
$$4) -2 + 0.5\ j = (-2,0.5)$$
$$5)\ \sqrt{-16} = \sqrt{16 \times -1} = \sqrt{16} \times \sqrt{-1} = 4\ j = 0 + 4\ j = (0,4)$$

2. عمليات على الأعداد المركبة:

جمع الأعداد المركبة وطرحها:

تعريف 3**:** جمع عددين مركبين (أو طرحهما من بعض) هو عدد مركب نتحصل عليه بجمع الأجزاء الحقيقية مع بعض (أو طرحها من بعض) وبجمع الأجزاء التخيلية مع بعض (أو طرحها من بعض).

مثال 3**:** اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ (-2+3j)+(7-4j), \qquad 2)\ (-3+2j)-(5-j), \qquad 3) -(1-2j),$$
$$4)\ (5-j)+1-2j, \qquad 5) -2+6j+(8-6j), \qquad 6) -(4-j)+(4-j).$$

الحل:

$$1)\ (-2+3j)+(7-4j)=-2+3j+7-4j=(-2+7)+(3-4)j=5-j$$
$$2)\ (-3+2j)-(5-j)=-3+2j-5+j=(-3-5)+(2+1)j=-8+3j$$
$$3)\ -(1-2j)=-1+2j$$
$$4)\ (5-j)+1-2j=5-j+1-2j=(5+1)+(-1-2)j=6-3j$$
$$5)\ -2+6j+(8-6j)=-2+6j+8-6j=(-2+8)+(6-6)j=6+0j=6$$
$$6)\ -(4-j)+(4-j)=-4+j+4-j=(-4+4)+(1-1)j=0+0j=0$$

نظرية 1: جمع الأعداد المركبة تبديلي وتجميعي.

ضرب الأعداد المركبة:

تعريف 4: ضرب عددين مركبين هو عدد مركب نتحصل عليه بضرب كل حد من حدود الأول في كل حد من حدود الثاني (مثل ضرب كثيرات الحدود).

مثال 4: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$1)\ (-2+3j)(7-4j),\quad 2)\ (-3+2j)(5-j),\quad 3)\ (1-2j)(5-j),$

$4)\ (5-j)(1-2j),\quad 5)\ (-2+6j)(8-6j),\quad 6)\ (4-j)^2=(4-j)(4-j).$

الحل:

$$1)\ (-2+3j)(7-4j)=(-2\times 7)+(-2\times -4j)+(3j\times 7)+(3j\times -4j)$$
$$=-14+8j+21j-12j^2=-14+29j+12=-2+29j$$
$$2)\ (-3+2j)(5-j)=(-3\times 5)+(-3\times -j)+(2j\times 5)+(2j\times -j)$$
$$=-15+3j+10j-2j^2=-15+13j+2=-13+13j$$
$$3)\ (1-2j)(5-j)=(1\times 5)+(1\times -j)+(-2j\times 5)+(-2j\times -j)$$
$$=5-j-10j+2j^2=5-11j-2=3-11j$$
$$4)\ (5-j)(1-2j)=(5\times 1)+(5\times -2j)+(-j\times 1)+(-j\times -2j)$$
$$=5-10j-j+2j^2=5-11j-2=3-11j$$
$$5)\ (-2+6j)(8-6j)=(-2\times 8)+(-2\times -6j)+(6j\times 8)+(6j\times -6j)$$
$$=-16+12j+48j-36j^2=-16+60j+36=20+60j$$
$$6)\ (4-j)^2=(4-j)(4-j)=(4\times 4)+(4\times -j)+(-j\times 4)+(-j\times -j)$$
$$=16-4j-4j+j^2=16-8j-1=15-8j$$

نظرية 2: ضرب الأعداد المركبة تبديلي وتجميعي وتوزيعي بالنسبة للجمع والطرح.

مثال 5: ليكن لدينا الأعداد المركبة التالية:

$$z_1 = -2 + 3j, \qquad z_2 = 4 - j, \qquad z_3 = -1 - 18j$$

احسب كل مما يلي:

$$1)\ z_1 z_2 + z_2 z_3, \qquad 2)\ z_2 z_3 - z_1 z_3$$

الحل:

$$1)\ z_1 z_2 + z_2 z_3 = z_2(z_1 + z_3) = (4 - j)(-2 + 3j + (-1 - 18j)) = (4 - j)(-2 + 3j - 1 - 18j)$$
$$= (4 - j)(-3 - 15j) = -12 - 60j + 3j + 15j^2 = -12 - 57j - 15 = -27 - 57j$$

$$2)\ z_2 z_3 - z_1 z_3 = z_3(z_2 - z_1) = (-1 - 18j)(4 - j - (-2 + 3j)) = (-1 - 18j)(4 - j + 2 - 3j)$$
$$= (-1 - 18j)(6 - 4j) = -6 + 4j - 108j + 72j^2 = -6 - 104j - 72 = -78 - 104j$$

قسمة عدد مركب على عدد حقيقي:

تعريف 5: قسمة عدد مركب على عدد حقيقي لايساوي الصفر هو عدد مركب نتحصل عليه بقسمة كلا من جزئه الحقيقي والتخيلي على هذا العدد.

مثال 6: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ \frac{-2 + 3j}{2}, \qquad 2)\ \frac{4 - 2j - 6 + 3j}{-2}, \qquad 3)\ \frac{4 - 2j}{-2} + \frac{-6 + 3j}{-2}.$$

الحل:

$$1)\ \frac{-2 + 3j}{2} = -1 + 1.5j$$
$$2)\ \frac{4 - 2j - 6 + 3j}{-2} = -2 + j + 3 - 1.5j = 1 - 0.5j$$
$$3)\ \frac{4 - 2j}{-2} + \frac{-6 + 3j}{-2} = -2 + j + 3 - 1.5j = 1 - 0.5j$$

مرافق عدد مركب:

تعريف 6: مرافق عدد مركب $z = a + bj$ هو العدد المركب $\bar{z} = a - bj$.

مثال 7: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ \overline{(-3 + j)} + 2 + 3j, \qquad 2)\ \overline{(\pi - \sqrt{7}j)} + 5 - 2j, \qquad 3)\ (2 - j)\overline{(-1 - j)}$$

الحل:

$$1)\ \overline{(-3+j)}+2+3j=-3-j+2+3j=-1+2j$$

$$2)\ \overline{(\pi-\sqrt{7}j)}+5-2j=\pi+\sqrt{7}j+5-2j=(\pi+5)+(\sqrt{7}-2)j$$

$$3)\ (2-j)\overline{(-1-j)}=(2-j)(-1+j)=-2+2j+j-j^2=-2+3j+1=-1+3j$$

نظرية 3**:** ضرب عدد مركب لا يساوي الصفر في مرافقه هو عدد حقيقي (موجب)

وإذا كان $z=a+bj$ فإن $z\bar{z}=a^2+b^2$.

مثال 8**:** اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ \overline{(-3+j)}(-3+j),\qquad 2)\ (\sqrt{2}-2j)\overline{(\sqrt{2}-2j)}$$

الحل:

$$1)\ \overline{(-3+j)}(-3+j)=(-3-j)(-3+j)=9-3j+3j-j^2=9+1=10$$

$$2)\ (\sqrt{2}-2j)\overline{(\sqrt{2}-2j)}=(\sqrt{2}-2j)(\sqrt{2}+2j)=(\sqrt{2})^2-(2j)^2=2-4j^2=2+4=6$$

قسمة الأعداد المركبة:

تعريف 7**:** قسمة عدد مركب على آخر لا يساوي الصفر هو عدد مركب نتحصل عليه بضرب كل من العددين في مرافق المقسوم عليه (المقام) ثم أداء القسمة.

مثال 9**:** اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ \frac{1}{-3-4j},\qquad 2)\ \frac{5+j}{2-3j},\qquad 3)\ \frac{2-3j}{6-j}$$

الحل:

$$1)\ \frac{1}{-3-4j}=\frac{1}{-3-4j}\times\frac{-3+4j}{-3+4j}=\frac{-3+4j}{(-3)^2-(4j)^2}=\frac{-3+4j}{9-16j^2}=\frac{-3+4j}{9+16}=\frac{-3+4j}{25}=-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}j$$

$$2)\ \frac{5+j}{2-3j}=\frac{5+j}{2-3j}\times\frac{2+3j}{2+3j}=\frac{10+15j+2j+3j^2}{2^2-(3j)^2}=\frac{10+17j-3}{4-9j^2}=\frac{7+17j}{4+9}=\frac{7+17j}{13}=\frac{7}{13}+\frac{17}{13}j$$

$$3)\ \frac{2-3j}{6-j}=\frac{2-3j}{6-j}\times\frac{6+j}{6+j}=\frac{12+2j-18j-3j^2}{6^2-j^2}=\frac{12-16j+3}{36+1}=\frac{15-16j}{37}=\frac{15}{37}-\frac{16}{37}j$$

3. الشكل القطبي لعدد مركب:

تعريف 8: طول عدد مركب $z = a + b\,j$ هو الجذر التربيعي لمجموع مربعي كل من جزئه الحقيقي والتخيلي، أي هو: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال 10: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ |-3-4j|,\qquad 2)\ |-3+4j|,\qquad 3)\ |2-3j+4+5j|,\qquad 4)\ |2-3j|+|4+5j|$$

الحل:

$$1)\ |-3-4j| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$2)\ |-3+4j| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$3)\ |2-3j+4+5j| = |6+2j| = \sqrt{6^2+2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$
$$4)\ |2-3j|+|4+5j| = \sqrt{2^2+(-3)^2} + \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{13}+\sqrt{41}$$

نظرية 4: مربع طول عدد مركب هو حاصل ضرب العدد المركب في مرافقه.

مثال 11: اكتب ما يلي على الشكل الديكارتي: $(3-2j)(3+2j)$

الحل:

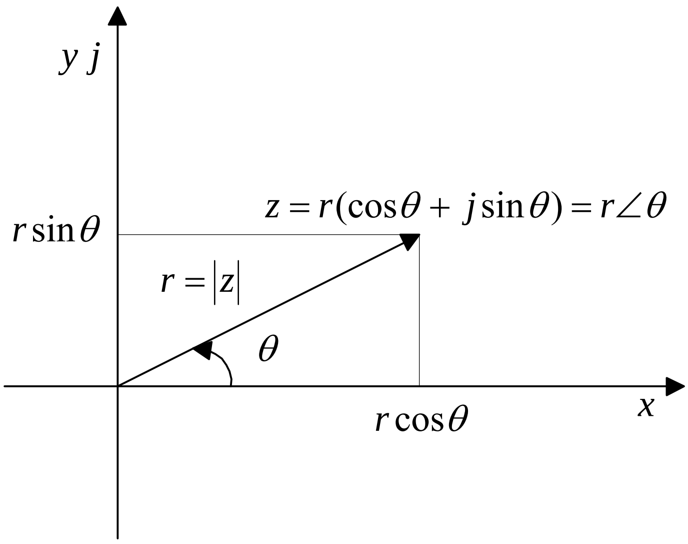
$$(3-2j)(3+2j) = (3-2j)\overline{(3-2j)} = |3-2j|^2 = 3^2+2^2 = 13$$

تعريف 9: الشكل القطبي لعدد مركب z هو كالتالي:

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

حيث أن r هو طول z ، وهو طول المتجه الذي يمثله، و θ هي الزاوية المحصورة بين محور السينات والمتجه الذي يمثل z و تسمى زاوية z

يرمز للشكل القطبي السابق بالرمز: $z = r\angle\theta$



مثال 12: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ 0\angle 0^\circ,\quad 2)\ 2\angle 30^\circ,\quad 3)\ 3\angle 135^\circ,\quad 4)\ 0.5\angle -90^\circ$$

الحل:

$$1)\ 0\angle 0° = 0(\cos 0° + j\sin 0°) = 0(1+1j) = 0$$

$$2)\ 2\angle 30° = 2(\cos 30° + j\sin 30°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j\right) = \sqrt{3} + j$$

$$3)\ 3\angle 135° = 3(\cos 135° + j\sin 135°) = 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}j\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}j$$

$$4)\ 0.5\angle -90° = 0.5(\cos(-90°) + j\sin(-90°)) = 0.5(0-1j) = -0.5j$$

نظرية 5**:** يمكن كتابة أي عدد مركب $z = a + bj$ على شكل قطبي $z = r\angle\theta$ باتباع الخطوات التالية

الخطوة الأولى: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

الخطوة الثانية: إذا كان $r = 0$ فإن $\theta = 0$ و $z = 0\angle 0$ (أو $z = 0\angle\theta$. حيث θ تأخذ أية قيمة)

إذا كان $r \neq 0$ و $b \geq 0$ فإن $\theta = \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$

إذا كان $r \neq 0$ و $b < 0$ فإن $\theta = -\arccos\left(\frac{a}{r}\right)$

(أي أن الزاوية θ والجزء التخيلي b من الإشارة نفسها) حيث أن الدالة arccos هي الدالة العكسية للدالة cos على الفترة $[0,180°]$ ، ويمكن الحصول عليها في الآلة الحاسبة بالضغط على *shift* ثم cos (أي $\cos^{-1}$).

مثال 13**:** اكتب كلا مما يلي على الشكل القطبي:

$$1)\ 5+5j, \qquad 2)\ -\sqrt{3} - j$$

الحل:

$$1)\ a = 5 \quad b = 5$$
$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
$$b = 5 \geq 0 \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{a}{r}\right) = \arccos\left(\frac{5}{5\sqrt{2}}\right) = 45°$$
$$5 + 5j = r\angle\theta = 5\sqrt{2}\angle 45°$$
$$2)\ a = -\sqrt{3} \quad b = -1$$
$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$b = -1 < 0 \Rightarrow \theta = -\arccos\left(\frac{a}{r}\right) = -\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -150°$$
$$-\sqrt{3} - j = r\angle\theta = 2\angle -150°$$

قانون دوموافر: إذا كان n. عددا صحيحا فإن:

$$(r\angle\theta)^n = r^n\angle n\theta$$

و من تطبيقات هذا القانون أننا إذا أردنا أن نرفع عددا مركبا إلى أس صحيح فإننا نكتبه على شكله القطبي ثم نطبق القانون.

مثال 14: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ (1+j)^{10}, \qquad 2)\ (1+j)^{-10}$$

الحل:

1) الخطوة الأولى: نكتب العدد $1+j$ على الشكل القطبي:

$$a=1, b=1$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\neq 0$$

$$b=1\geq 0 \Rightarrow \theta=\arccos\left(\frac{a}{r}\right)=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=45°$$

ومنه فإن:

$$1+j=r\angle\theta=\sqrt{2}\angle 45°$$

الخطوة الثانية: نطبق قانون دوموافر:

$$(1+j)^{10}=(\sqrt{2}\angle 45°)^{10}=(\sqrt{2})^{10}\angle 10\times 45°=32\angle 450°$$

الخطوة الثالثة: نرجع إلى الشكل الديكارتي:

$$(1+j)^{10}=32\angle 450°=32(\cos 450°+j\sin 450°)=32(0+1j)=32j$$

2) نستخدم نتيجة الخطوة الأولى من الفقرة 1 لهذا المثال:

$$1+j=\sqrt{2}\angle 45°$$

الخطوة الثانية: نطبق قانون دوموافر:

$$(1+j)^{-10}=(\sqrt{2}\angle 45°)^{-10}=(\sqrt{2})^{-10}\angle -10\times 45°=\frac{1}{32}\angle -450°$$

الخطوة الثالثة: نرجع إلى الشكل الديكارتي:

$$(1+j)^{-10}=\frac{1}{32}\angle -450°=\frac{1}{32}(\cos(-450°)+j\sin(-450°))=\frac{1}{32}(0-1j)=-\frac{1}{32}j$$

قانون أولير: $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$ ، أي أن: $r\angle\theta=re^{j\theta}$.

ويسمى هذا الشكل الأخير بالشكل الأسي.

ومن فوائد هذا القانون أن أداء الحسابات على الشكل الأسي سهلة.

مثال 15 : اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ (2\angle 30°)(0.5\angle 90°),\qquad 2)\ \frac{2(\cos 30° + j\sin 30°)}{0.5(\cos 90° + j\sin 90°)}$$

الحل:

$$1)\ (2\angle 30°)(0.5\angle 90°) = 2e^{j30°}\times 0.5e^{j90°} = 2\times 0.5\times e^{j30°+j90°} = 1\times e^{j120°}$$

$$= 1(\cos 120° + j\sin 120°) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$2)\ \frac{2(\cos 30° + j\sin 30°)}{0.5(\cos 90° + j\sin 90°)} = \frac{2e^{j30°}}{0.5e^{j90°}} = \frac{2}{0.5}e^{j30°-j90°} = 4e^{-j60°}$$

$$= 4(\cos(-60°) + j\sin(-60°)) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = 2 - 2\sqrt{3}j$$

4. جذور عدد مركب:

نظرية 6 : إذا كان n. عددا صحيحا لا يساوي الصفر فإن:

$$(r\angle\theta)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\angle\frac{\theta}{n} + \frac{360°k}{n},\qquad k = 0,\dots,n-1$$

أي أن هناك n جذرا نتحصل عليها بالتعويض عن قيم k كل مرة.

مثال 16 : حل المعادلات التالية في $\mathbb{C}$:

$$1)\ z^3 = -j,\qquad 2)\ z^6 = 1$$

الحل:

1) يمكن أن نكتب المعادلة كما يلي:

$$z = (-j)^{\frac{1}{3}}$$

إذن حل المعادلة يرجع إلى إيجاد الجذور التكعيبية للعدد $-j$.

الخطوة الأولى: نكتب العدد $-j$ على الشكل القطبي:

$$a = 0 \quad b = -1$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1 \neq 0$$

$$b = -1 < 0 \Rightarrow \theta = -\arccos\left(\frac{a}{r}\right) = -\arccos\left(\frac{0}{1}\right) = -90°$$

$$-j = r\angle\theta = 1\angle -90°$$

الخطوة الثانية: نطبق النظرية 6:

$$z=(-j)^{\frac{1}{3}}=(1\angle-90°)^{\frac{1}{3}}=1^{\frac{1}{3}}\angle-\frac{90°}{3}+\frac{360°k}{3},\qquad k=0,1,2$$
$$z=1\angle-30°+120°k,\qquad k=0,1,2$$

الخطوة الثالثة: نعوض عن قيم k :

$$k=0: z_0=1\angle-30°+(120°\times0)=1\angle-30°=1(\cos(-30°)+j\sin(-30°))=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}j$$
$$k=1: z_1=1\angle-30°+(120°\times1)=1\angle90°=1(\cos90°+j\sin90°)=0+1j=j$$
$$k=2: z_2=1\angle-30°+(120°\times2)=1\angle210°=1(\cos210°+j\sin210°)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}j$$

2) يمكن أن نكتب المعادلة كما يلي: $z=1^{\frac{1}{6}}$

إذن حل المعادلة يرجع إلى إيجاد الجذور السادسة للعدد 1.

الخطوة الأولى: نكتب العدد 1 على الشكل القطبي:

$$a=1,\quad b=0$$
$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+0^2}=1\neq0$$
$$b=0\geq0\Rightarrow\theta=\arccos\left(\frac{a}{r}\right)=\arccos\left(\frac{1}{1}\right)=0°$$
$$1=r\angle\theta=1\angle0°$$

الخطوة الثانية: نطبق النظرية 6:

$$z=1^{\frac{1}{6}}=(1\angle0°)^{\frac{1}{6}}=1^{\frac{1}{6}}\angle\frac{0°}{6}+\frac{360°k}{6},\qquad k=0,1,2,3,4,5$$
$$z=1\angle60°k,\qquad k=0,1,2,3,4,5$$

الخطوة الثالثة: نعوض عن قيم k :

$$k=0: z_0=1\angle60°\times0=1\angle0°=1(\cos0°+j\sin0°)=1$$
$$k=1: z_1=1\angle60°\times1=1\angle60°=1(\cos60°+j\sin60°)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$$
$$k=2: z_2=1\angle60°\times2=1\angle120°=1(\cos120°+j\sin120°)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$$
$$k=3: z_3=1\angle60°\times3=1\angle180°=1(\cos180°+j\sin180°)=-1$$
$$k=4: z_4=1\angle60°\times4=1\angle240°=1(\cos240°+j\sin240°)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$$
$$k=5: z_5=1\angle60°\times5=1\angle300°=1(\cos300°+j\sin300°)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$$

5. حل المعادلات الجبرية باستخدام الأعداد المركبة :

سنكتفي بالمعادلات من الدرجة الثانية.ذات معاملات حقيقية.

نظرية 7 : لتكن لدينا المعادلة التالية ذات المجهول z و المعاملات الحقيقية $a \neq 0$ و b و c :

$$az^2 + bz + c = 0$$

الجذور تعطى بالقانون التالي:

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال 17 : حل كلا من المعادلات التالية في مجموعة الأعداد المركبة:

$$1)\ z^2 + 2z + 5 = 0, \qquad 2)\ z^2 + z + 1 = 0, \qquad 3)\ z^2 - z - 6 = 0$$

الحل:

$$1)\ a = 1, \quad b = 2, \quad c = 5$$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - (4 \times 1 \times 5)}}{2 \times 1} = \frac{-2 - \sqrt{-16}}{2}$$

$$= \frac{-2 - \sqrt{16 \times -1}}{2} = \frac{-2 - (\sqrt{16} \times \sqrt{-1})}{2} = \frac{-2 - 4j}{2} = -1 - 2j$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - (4 \times 1 \times 5)}}{2 \times 1} = \frac{-2 + \sqrt{-16}}{2}$$

$$= \frac{-2 + \sqrt{16 \times -1}}{2} = \frac{-2 + (\sqrt{16} \times \sqrt{-1})}{2} = \frac{-2 + 4j}{2} = -1 + 2j$$

$$2)\ a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1$$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - (4 \times 1 \times 1)}}{2 \times 1} = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$$= \frac{-1 - \sqrt{3 \times -1}}{2} = \frac{-1 - (\sqrt{3} \times \sqrt{-1})}{2} = \frac{-1 - \sqrt{3}j}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - (4 \times 1 \times 1)}}{2 \times 1} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{3 \times -1}}{2} = \frac{-1 + (\sqrt{3} \times \sqrt{-1})}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3}j}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

3) $a=1, \quad b=-1, \quad c=-6$

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{(-1)^2-(4\times1\times-6)}}{2\times1}=\frac{1-\sqrt{25}}{2}$$

$$=\frac{1-5}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$z_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{(-1)^2-(4\times1\times-6)}}{2\times1}=\frac{1+\sqrt{25}}{2}$$

$$=\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}=3$$

تمارين

تمرين 1: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ 2j-(-2+5j)-(-2j),\qquad 2)\ (4-4j)+6j-(0.5-3j),\qquad 3)\ \frac{1}{3}+2j-(2+\frac{1}{3}j)$$

تمرين 2: اكتب كل مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ (2-3j)(-5+6j),\qquad 2)\ (2-j+3-5j)\overline{(2-4j)},\qquad 3)\ (-2-j)^2+(3+j)\overline{(-1-j)}.$$

تمرين 3: احسب طول كلا مما يلي ومرافقه:

$$1)\ 2-j,\qquad 2)\ -3+j,\qquad 3)\ (1+3j)(4-2j).$$

تمرين 4: ليكن لدينا الأعداد المركبة التالية:

$$z_1=2+j,\qquad z_2=-3-j.$$

اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ (z_1+\overline{z_2})^2-jz_1,\qquad 2)\ -z_2+(2-j)z_1z_2.$$

تمرين 5: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ \frac{3+j}{1-j},\qquad 2)\ \frac{j}{(1-j)^2}+\frac{5+2j}{-j},\qquad 3)\ \frac{1-3j}{j}-\overline{(2+j)(5+2j)}.$$

تمرين 6: اكتب كلا مما يلي على الشكل القطبي:

$$1)\ -4,\qquad 2)\ 3j,\qquad 3)\ 1-j,\quad 4)\ \sqrt{2}-\sqrt{2}j.$$

تمرين 7: اكتب كلا مما يلي على الشكل القطبي:

$$1)\ 1+\sqrt{3}j,\qquad 2)\ 2-2\sqrt{3}j,\qquad 3)\ \sqrt{5}-2j,\quad 4)\ 3-3j.$$

تمرين 8: اكتب كلا مما يلي على الشكل الديكارتي:

$$1)\ \left(1+\sqrt{3}j\right)^5,\qquad 2)\ (-2j)^7,\qquad 3)\ (2+j)^6.$$

تمرين 9: حل المعادلات التالية:

$$1)\ z^4=-16,\qquad 2)\ z^3=8j,\qquad 3)\ z^5=1.$$

تمرين 10: حل المعادلات التالية:

$$1)\ z^2+2z+3=0,\qquad 2)\ z^2+z+1=0,\qquad 3)\ z^2+2z+2=0.$$

المراجع

1) صلاح أحمد وإلهام حمصي وموفق دعبول، معجم الرياضيات المعاصرة، مؤسسة الرسالة، بيروت، 1403هـ- 1983م.

2) علي عبد الله الدفاع، نوابغ علماء العرب والمسلمين في الرياضيات، دار جون وايلي وأبناؤه، نيويورك، 1987م.

3) Gwyn Davies and Gordon Hick, Mathematics for scientific and technical students, Addison Wesley Longman, Harlow, England, 1998.

4) Anders Hald, A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750, John Wiley and Sons, New York, 1989.

5) Alexander Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1986.

6) Seymour Lipschutz and Marc Lipson, Discrete Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1997.

7) Peter Tebbutt, Basic Mathematics, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1998.

المحتويات